MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 11 – CAŁKI WIELOKROTNE.

- *Całką wielokrotną* po obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ z funkcji (ciągłej) dwóch zmiennych $f(x,y)$ nazywamy całkę Riemanna

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \lim_n \sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_i \quad \text{gdzie } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

- Jeśli funkcja $f$ jest nieujemna, to całka jest równa objętości bryły pod wykresem funkcji $f$ (wykres ten jest powierzchnią w $\mathbb{R}$.)

- *Całką wielokrotną* po obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ z funkcji (ciągłej) trzech zmiennych $f(x,y,z)$ nazywamy całkę Riemanna

$$\iint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_n \sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

- Jeśli obszar $\Omega$ jest zawarty pasie $a \le x \le b$, a $P(x)$ jest polem powierzchni przekroju płaszczyzną równoległą do $YZ$, przechodzącą przez punkt $x$, i jeśli $y$ zmienia się w zakresie $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, dla ustalonego $x$, to wówczas całka podwójna jest równa całce iterowanej

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

- Jeśli obszar $\Omega$ jest zawarty pasie $c \le y \le d$, jeli $Q(y)$ jest polem powierzchi przekroju płaszczyzną równoległą do $XZ$, przechodzącą przez punkt $y$, i jeśli $x$ zmienia się w zakresie $\psi_1(y) \le x \le \phi_2(y)$, dla ustalonego $y$, to wówczas całka podwójna jest równa całce iterowanej

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d Q(y)\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

1. Obliczyć następujące całki wielokrotne po obszarze $\Omega$ który jest ćwiartką koła $x^2+y^2 \le 4$, dla $x,y \ge 0$:

   a) $\iint_\Omega xy\,dx\,dy$ b) $\iint_\Omega x-y\,dx\,dy$ c) $\iint_\Omega x^2+y^2\,dx\,dy$ d) $\iint_\Omega x^2-y^2\,dx\,dy$, e) $\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy$.

2. Obliczyć następujące całki wielokrotne po obszarze $\Omega$ który jest trójkątem ograniczonym prostymi $y=0$, $y=x$ i $y=2-x$:

   a) $\iint_\Omega xy\,dx\,dy$ b) $\iint_\Omega x+y\,dx\,dy$ c) $\iint_\Omega x^2+y^2\,dx\,dy$ d) $\iint_\Omega x^2-y^2\,dx\,dy$, e) $\iint_\Omega x^2y^2\,dx\,dy$.

- Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie są dane wzorami $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, gdzie $t \ge 0$, $t \in [0,2\pi]$; wówczas $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Zamiana zmiennych kartezjańskich $(x,y)$ na biegunowe $(r,t)$ zmienia obszar $\Omega$ w nowy obszar $D = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 : (r\cos t, r\sin t) \in \Omega\}$

3. Wyznaczyć obraz $D$ obszaru $\Omega$ przy zamianie zmiennych kartezjańskich na biegunowe, dla $\Omega$ określonego jako:

   a) sektor pierwszej ćwiartki poniżej prostej $y=x$, ograniczony łukiem okręgu $x^2+y^2=16$
   b) sektor drugiej ćwiartki powyżej prostej $y=-x$, ograniczony łukiem okręgu $x^2+y^2=16$
   c) sektor trzeciej ćwiartki poniżej prostej $y=-x$, ograniczony łukiem okręgu $x^2+y^2=4$

- Zamiana zmiennych kartezjańskich na biegunowe w całce podwójnej:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D F(r,t)\ r\,dr\,dt \text{ gdzie } F(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$$

4. Niech $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x,y \ge 0\}$ bedzie ćwiartką koła w pierwszej ćwiartce układu kartezjańskiego. Obliczyć następujace całki podwójne:

   a) $\iint_\Omega xy\,dx\,dy$ b) $\iint_\Omega x^2+y^2\,dx\,dy$ c) $\iint_\Omega x^2-y^2\,dx\,dy$ d) $\iint_\Omega x+y\,dx\,dy$, e) $\iint_\Omega x^2y^2\,dx\,dy$.

- Jeśli $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są funkcjami określonymi na krzywej $L$, łączącej punkt $A$ z puntem $B$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ to całką (ogólną) krzywoliniową (po tej krzywej) nazywamy wyrażenie

$$\int_L (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} (P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i)$$

  Jeśli krzywa $L$ jest zamknięta, to całkę po niej oznaczamy $\oint_L$.

- **Wzór Greena**: Jeśli krzywa zamknięta $L$ jest brzegiem obszaru $\Omega$ i funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi, to

$$\oint_L (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \iint_\Omega \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy.$$

- Ze wzoru Greena wynika że pole obszaru $\Omega$, ograniczonego krzywą zamkniętą $L$, jest równe:

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_L (-y\, dx + x\, dy)\,.$$

5. Obliczyć całki $\oint_L (-y\, dx + x\, dy)$ dla krzywej $L$ określonej w następujący sposób:
   a) $L$ jest brzegiem trójkąta ograniczonego prostymi $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$;
   b) $L$ jest brzegiem trójkąta ograniczonego prostymi $y = 0$, $y = x + 1$ i $y = -x + 1$;
   c) $L$ jest brzegiem kwadratu ograniczonego prostymi $|x| + |y| = 1$;
   d) $L$ jest okręgiem o środku $(0, 0)$ i promieniu $r = 4$;

6. Obliczyć pole obszaru $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 4\}$.

7. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_L (x\, dy - y\, dx)$ po łuku paraboli $y = x^2$, od punktu $A = (0, 0)$ do punktu $B = (2, 4)$.

8. Obliczyć całkę krzywoliniową $\displaystyle\int_L ((x + y)\, dx + (x - y)\, dy)$ po łuku paraboli $y = x^2$, od punktu $A = (-1, 1)$ do punktu $B = (1, 1)$.

9. Obliczyć prawą i lewą stronę wzoru Greena dla funkcji $P(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ oraz $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, i obszaru $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. Obliczyć prawą i lewą stronę wzoru Greena dla funkcji $P(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ oraz $Q(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, i obszaru $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Janusz Wysoczański