MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 12 – RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

- Metoda **rozdzielonych zmiennych**: równanie różniczkowe postaci $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$ sprowadza się do postaci $\psi(y)dy = \varphi(x)dx$ i rozwiązuje obliczając całki $\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx$.

1. Metodą rozdzielonych zmiennych rozwiązać równania różniczkowe:
   (a) $xy' + y^2 = 1$, (b) $xy' = y$, (c) $y' \sin x = y \cos x$, (d) $y' = e^{2x-y}$, (e) $ydx = (x^2 - 1)dy$.

- Zastosowanie podstawienia $y = xu$, gdzie $u = u(x)$ jest funkcją zmiennej x, daje: $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

2. Stosując tego typu podstawienie przekształcić poniższe równania różniczkowe i rozwiązać je:
   (a) $xy' = x + y$, (b) $(x + y)y' + y = 0$, (c) $y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x}$, (d) $y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

- **Równanie różniczkowe liniowe:** $y' = A(x)y + B(x)$. Dla $B(x) = 0$ jest to równanie **jednorodne**, które sprowadza się je do postaci: $\frac{dy}{y} = A(x)dx$ i całkuje: $y = \exp\left[C \int A(x)\,dx\right]$.

3. Rozwiązać równania liniowe jednorodne:
   (a) $xy' = y$, (b) $xy' + x^2y = 0$, (c) $y' = y \sin x$, (d) $y' + \frac{y}{x} = 0$. $y' + 2xy = 0$.

- Jeśli $y_c(x) = c \cdot \varphi(x)$ jest rozwiązaniem równania liniowego jednorodnego $y' = A(x)y$, dla pewnej stałej c, to metodą **uzmienniania stałej** $c \to c(x)$. Otrzymuje się równość $y(x) = c(x)\varphi(x)$, gdzie $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x)$ i można rozwiązać równanie niejednorodne $\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)$, podstawiając $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x)$ do równania $\frac{dy}{dx} = c(x)\varphi'(x) + \frac{dc}{dx}\varphi(x)$. Daje to, po uproszczeniu, równanie różniczkowe $B(x) = \varphi(x)\frac{dc}{dx}$, równoważne z $c(x) = \int \frac{B(x)}{\varphi(x)}dx$.

4. Metod uzmienniania stałej rozwiązać następujące równania liniowe niejednorodne.
   (a) $xy' = x + y$, (b) $xy' + 2y = x$, (c) $y' + y = 2x$, (d) $y' + y = x^3$, (e) $y' - ay = e^{ax}$.

- Jeśli równanie różniczkowe jest postaci $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$, i wyrażenie po lewej stronie jest **różniczką zupełną** pewnej funkcji $F(x, y)$, czyli $dF(x, y) = P(x, y)dx+Q(x, y)dy$, to krzywe całkowe są rozwiązaniami równania $F(x, y) = C$.

5. Rozwiązać równania różniczkowe, znajdując odpowiednią funkcję $F(x, y)$. W $(b), (c), (d)$ wyznaczyć jakieś 3 krzywe całkowe:
   (a) $(2x + 3x^2y^3)dx + (3x^3y^2 - 2y)dy = 0$ (b) $\frac{y}{x}dx + \ln x dy = 0$,
   (c) $(2x + 2y^2)dx + (\cos y + 4xy)dy = 0$, (d) $y(1 + x^2y^2)^{-1}dx + x(1 + x^2y^2)^{-1}dy = 0$.

- Jeśli wyrażenie $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ nie jest różniczką zupelną, ale istnieje funkcja $\mu = \mu(x, y)$ taka, że $\mu(x, y)P(x, y)dx+\mu(x, y)Q(x, y)dy$ jest różniczką zupełną, to funkcję μ nazywamy **czynnikiem całkującym** równania różniczkowego $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Jeśli czynnik całkujący jest postaci $\mu(x, y) = \varphi(x)$ (funkcją jednej zmiennej x), to znajdujemy go z równania $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x)P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)Q(x, y)$, czyli

$$\varphi'(x)P(x, y) + \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \varphi'(x)Q(x, y) + \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y).$$

6. Rozwiązać równania różniczkowe znajdując odpowiedni czynnik calkujący postaci $\varphi(x)$:
   (a) $(xy + 2y)dx + (x + x^2)dy = 0$ (b) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy$,
   (c) $y^2dx + (x^2 - 2xy)dy$, (d) $y^2dx + x(1 - \sin xy)dy$.

Janusz Wysoczański