MATEMATYKA. Chemia I rok. LISTA ZADAŃ NR 2

1. Na kartezjańskim prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie wyznaczyć zbiory punktów (x, y) których współrzędne są rozwiązaniami następujących nierówności:
(i) $x \geq 0$; (ii) $x \leq 0$ i $y \geq 0$; (iii) $x + y \geq 1$ (iv) $-1 \leq x + y \leq 3$ (v) $x - y \leq 5$;
(vi) $|x + y| \leq 2$; (vii) $|x| + |y| \leq 2$; (viii) $|x - y| \geq 1$; (ix) $2 \leq |x - y| \leq 4$; (x) $0 \leq xy \leq 6$.
2. Wyznaczyć sumę $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$, różnicę $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$ i iloczyn skalarny $\vec{\mathbf{u}}$ wektorów $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$, które są zadane składowymi:
(i) $\vec{\mathbf{u}} = [1, -1], \vec{\mathbf{v}} = [2, 1]$; (ii) $\vec{\mathbf{u}} = [-1, 1], \vec{\mathbf{v}} = [-1, -1]$; (iii) $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} = [3, -4]$
3. Wyznaczyć długości następujących wektorów: (i) $\vec{\mathbf{u}} = [-1, -2]$; (ii) $\vec{\mathbf{u}} = [-3, 4]$; (iii) $\vec{\mathbf{u}} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$; (iv) $\vec{\mathbf{u}} = [-\frac{1}{2}, 1]$; (v) $\vec{\mathbf{u}} = [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$; (vi) $\vec{\mathbf{u}} = [-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}]$.
4. Obliczając iloczyn skalarny $\vec{\mathbf{u}} \circ \vec{\mathbf{v}}$ wyznaczyć kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, jeśli:
(i) $\vec{\mathbf{u}} = [1, 0], \vec{\mathbf{v}} = [0, -2]$; (ii) $\vec{\mathbf{u}} = [2, 2], \vec{\mathbf{v}} = [-1, 1]$; (iii) $\vec{\mathbf{u}} = [1, \sqrt{3}], \vec{\mathbf{v}} = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$
5. Wyznaczyć równanie prostej jeśli wiadomo, że zawiera ona wektor $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{PQ}$, o początku w punkcie P i końcu w punkcie Q, gdzie:
(i) $P = (1, -1)$, $Q = (-2, 2)$; (ii) $P = (1, -1)$, $Q = (-2, -2)$; (iii) $P = (2, 2)$, $Q = (1, -1)$; (iv) $P = (1, -1)$, $Q = (0, -1)$; (v) $P = (0, 1)$, $Q = (1, 0)$; (vi) $P = (1, 3)$, $Q = (3, 1)$.
6. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do wektora $\vec{\mathbf{u}}$, jeśli: (i) $\vec{\mathbf{u}} = [1, -2]$; (ii) $\vec{\mathbf{u}} = [\frac{1}{2}, 2]$; $\vec{\mathbf{u}} = [-2, 3]$; $\vec{\mathbf{u}} = [\frac{2}{5}, \frac{5}{3}]$.
7. Wyznaczyć równanie okręgu o środku w punkcie O i promieniu r, jeśli: (i) $O = (2, 3)$ i $r = 2$; (ii) $O = (-1, -3)$ i $r = 3$; (iii) $O = (-2, 2)$ i $r = 4$; (iv) $O = (5, 3)$ i $r = 4$. Narysować każdy z tych okręgu w układzie współrzędnych.
8. Uzasadnić, że równanie $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ wyznacza okrąg. Znaleźć jego środek i promień.
9. Uzasadnić, że nierówność $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 \leq 0$ wyznacza koło. Znaleźć jego środek i promień.
10. Wyznaczyć punkty przecięcia okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ i prostej o równaniu $x + y = 3$.
11. Wyznaczyć równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ w punkcie $(3, 2)$ oraz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie $(3, -2)$.
12. Znaleźć odległość pomiędzy punktami $P = (\frac{1}{2}, -7)$ i $Q = (\frac{7}{2}, -3)$.
13. Sprawdzić czy punkty $P = (20, 1)$, $Q = (-1, 2)$ i $S = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ leżą na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 50$.
14. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-\sqrt{3}, 11)$ i przecinającej oś OX pod kątem $30°$
15. Czy istnieje okrąg o promieniu 5, który jest styczny jednocześnie do obu osi układu współrzędnych?
16*. Wyznaczyć wszystkie okręgi, które są styczne jednocześnie do prostej $y = 2x$ i prostej $y = 2x + 2$.

Janusz Wysoczański