MATEMATYKA. Chemia I rok. LISTA ZADAŃ NR 4

1. Wyznaczyć maksymalną dziedzinę dla następujących wzorów funkcji f: (i) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ (iii) $f(x) = \log(\sin x)$ (iv) $f(x) = \log(\sin^2 x)$ (v) $f(x) = \log_x 2$ (vi) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-1}$ (vii) $f(x) = \log\sqrt{1-x}$ (viii) $f(x) = \log\sqrt{3-2x^2}$ (ix) $f(x) = \frac{x+2}{x^3+2x^2-x+2}$ (x) $f(x) = \mathrm{tg}2x$ (xi) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}x}$ (xii) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ (xiii) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.
2. Wyznaczyć wielomian stopnia 4, którego pierwiastkami są liczby: (i) $1,2,3,4$ (ii) $-1,-2,-3,-4$ (iii) $1,-1,0,2$ (iv) $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},0$ (v) $\frac{3}{4},-\frac{2}{3},1,-2$ (vi) $1,1,2,2$.
3. Podać przykład dwóch różnych wielomianów stopnia 3, które mają te same pierwiastki.
4. Wyznaczyć wielomian $P(x) = Q(x)\cdot R(x)$, który jest iloczynem wielomianów $Q(x)$ oraz $R(x)$, jeśli: (i) $Q(x) = 2x^2-x-1$, $R(x) = x^3-x-2$ (ii) $Q(x) = x^3-3x+2$, $R(x) = 5x^2-1$ (iii) $Q(x) = x^4-3x^3+x^2-1$, $R(x) = x^3-7x^2-x+2$.
5. Wyznaczyć wartości wielomianu $f(x) = x^4-3x^3+2x^2-x+1$ w liczbach:
$-3,-2,-1,0,1,2,3$ oraz $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$.
6. Narysować na jednym układzie współrzędnych wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^x$ na maksymalnej dziedzinie, i wykres funkcji $g(x) = 2^{x^2}$ (na maksymalnej dziedzinie). W tym celu zaznaczyć punkty odpowiadające argumentom $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ i wyobrazić sobie dalszy przebieg tych wykresów.
7*. Jak można by uzasadnić że dla dużych liczb dodatnich x prawdziwa jest nierówność $3^x < 2^{x^2}$? Spróbować skorzystać z tożsamości $2^{x^2} = (2^x)^x$.
8. Wyznaczyć dziedziny funkcji: (i) $f(x) = \log(x+3)$ (ii) $f(x) = \sqrt{9-3x}$ (iii) $f(x) = \log(\mathrm{tg}\ x)$ (iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ (v) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (vi) $f(x) = \dfrac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$.
9. Naszkicować wykresy podanych niżej funkcji i wypisać ich własności (dziedzina, przeciwdziedzina, monotoniczność, parzystość, nieparzystość, okresowość, itp.).
(i) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ (ii) $f(x) = -x^3$ (iii) $f(x) = e^x+1$
10. Podać wzory funkcji złożonych $f\circ g$ i $g\circ f$ oraz wyznaczyć ich dziedziny, gdy: (i) $f(x) = x^2$ i $g(x) = -2x$ (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 1-x^2$ (iii) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ (iv) $f(x) = \log x$ i $g(x) = x+3$
11. Nastpujące funkcje przedstawić jako funkcje złożone. Wskazać funkcję zewnętrzną i wewnętrzną każdej z nich. (i) $f(x) = \log(x+3)$ (ii) $f(x) = \sin(\sin x)$ (iii) $f(x) = \log(\mathrm{tg}\ x)$ (iv) $f(x) = \sqrt{5-2x}$ (v) $f(x) = (\mathrm{ctg}x)^{-1}$ (vi) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}$
12. Wykonać dzielenie następujcych wielomianów: (i) $(x^4-3x^3+x^2-4x+5):(x-1)$ (ii) $x^6-2x^4-3x^2+x+12):(x^2+1)$
13. Rozwiązać równania: (i) $2+\dfrac{3-x}{x-2} = \dfrac{1}{2-x}+\dfrac{6-x}{3x^2-12}$ (ii) $x^4+5x^2-6=0$ (iii) $\dfrac{1}{128}\cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ (iv) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\dfrac{8}{27}\right)^{x-2} = 0$ (v) $\log_3(5x+2)-\log_3(8-x) = 2$ (vi) $\log(\log x)+\log(\log x^3-2) = 0$ (vii) $\dfrac{1}{5-\log x}+\dfrac{2}{1+\log x} = 1$ (viii) $\cos x = -\frac{1}{2}$ (ix) $\sqrt{2}\sin x+\mathrm{ctg}x = 0$ (x) $\sin^4 x+5\cos 2x+4 = 0$
14. Rozwiązać nierówności: (i) $x^2+2x > 3x^2$ (ii) $\dfrac{2x+1}{3x-5} < 0$ (iii) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$ (iv) $\dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x-2}$ (v) $(\frac{1}{3})^{2-x} > 9\cdot 3^{2x-1}$ (vi) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1) > 3$ (vii) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-1}{x+2} < 1$ (viii) $2\cos^2 x > \dfrac{3}{2}$ (ix) $5\sin^2 x+\sin^2 2x > 4\cos 2x$
15. Rozwiązać równania i nierówności z wartością bezwzględną: (i) $|x+1| = |x-1|$ (ii) $|1-2x|+|2x-6| = x$ (iii) $|x^2-7x+8| = 2$ (iv) $|x-1|+|2x-5| < 9$ (v) $\left|\dfrac{5x-3}{2x+7}\right| < 2$ (vi) $x^2-|x-1|-1 \leq 0$

Janusz Wysoczański