

1. Dla funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2$ wyznaczyć granicę $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dla (i) $a = 0$, (ii) $a = -1$, (iii) $a = 2$ i w każdym z tych przypadków, na podstawie definicji granicy, uzasadnić że dana liczba b jest szukaną granicą.
2. Dla funkcji określonej wzorem $f(x) = \sin x$ wyznaczyć granicę $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dla (i) $a = 0$, (ii) $a = \frac{\pi}{2}$, (iii) $a = \frac{\pi}{3}$ i w każdym z tych przypadków, na podstawie definicji granicy, uzasadnić że dana liczba b jest szukaną granicą. W tym celu skorzystać z tożsamości $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ i z nierówności $|\cos t| \leq 1$.
3. Obliczyć granice jednostronne: (i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$, (iv) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + x - 6}{|x^2 - 9|}$, (v) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + x - 6}{|x^2 - 9|}$, (vi) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}$, (vii) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sin x}$.
4. Sprawdzić, czy istnieją następujące granice, a jeśli nie to czy istnieje któraś granica jednostronna: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1}{x}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.
5. Wyznaczyć granice jednostronne, w $a = 0$ i w $a = 1$ funkcji danej wzorem: dla $x \in [0, 1)$ jest $f(x) = \ln(1 - x)$, a dla $x > 1$ jest $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
6. Wyznaczyć granice: (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x + \operatorname{tg} x}$, (iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$, (v) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$, (vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 2x - 5}{2x^3 + 4x^2 - x + 1}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$.
7. Obliczyć granice lewostronne i prawostronne funkcji $f(x) = [x]$ ($[x]$ jest to część całkowita liczby x) w punktach całkowitych: $\lim_{x \rightarrow a^-} [x]$ oraz $\lim_{x \rightarrow a^+} [x]$ dla $a \in \mathbb{Z}$.
8. Obliczyć granice lewostronne i prawostronne funkcji $f(x) = x - [x]$ w punktach całkowitych: $\lim_{x \rightarrow a^-} (x - [x])$ oraz $\lim_{x \rightarrow a^+} (x - [x])$ dla $a \in \mathbb{Z}$.
9. Dla danych liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($c \neq 0$), obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx}{cx}$.
10. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3 \operatorname{tg} 7x}$.
11. Obliczyć granicę lewostronną $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - x^2}$ oraz prawostronną $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - x^2}$.
12. Obliczyć granice: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ oraz (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$.
13. Obliczyć granice: (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$,
14. Obliczyć granice: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{\sin^2 x}$,