MATEMATYKA. Chemia I rok. LISTA ZADAŃ NR 10

1. Obliczyć czwartą pochodną funkcji f dla:

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = \sin 3x, \quad f(x) = \exp(-2x+1), \quad f(x) = \ln(1+x), \quad f(x) = \ln(1+x^2)$$

2. Obliczyć po kolei pierwszą, drugą trzecią, czwartą i piątą pochodną podanej funkcji f. Na tej podstawie zgadnąć wzór na n-tą pochodną funkcji f dla:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \ln x, \quad f(x) = 2^x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = e^x$$

3. Dla wielomianu $f(x) = 3x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 4x^2 - x + 2$ obliczyć kolejne pochodne f w zerze, czyli liczby $f^{(0)}(0) := f(0)$, $f^{(1)}(0) := f'(0)$, $f^{(2)}(0) := f''(0)$, $f^{(3)}(0) := f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ oraz $f^{6}(0)$ i na tej podstawie wyznaczyć szereg Taylora-Maclaurina dla tej funkcji f.
4. Obliczyć kolejne pochodne w zerze, czyli liczby $f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$, dla funkcji $f(x) = e^{2x}$ i na tej podstawie wyznaczyć szereg Taylora-Maclaurina funkcji f.
5. Obliczyć kolejne pochodne w zerze, czyli liczby $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dla funkcji $f(x) = \cos x$ i na tej podstawie zgadnąć wzór ogólny na n-tą pochodną w zerze tej funkcji. Korzystając z tego wzoru wyznaczyć szereg Taylora-Maclaurina funkcji f.
6. Korzystając ze wzoru Taylora-Maclaurina:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

(prawdziwego dla $|x| < 1$) wyznaczyć wzór Taylora-Maclaurina dla $f(x) = \ln(1-x)$. Z tych dwóch wzorów uzyskać rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{1}$$

7. Dla liczb naturalnych $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ wyznaczyć takie $x \in (-1, 1)$ dla którego

$$n = \frac{1+x}{1-x}$$

8. Korzystając ze wzoru (**??**) i zadania 7 wyznaczyć przedstawienie liczb $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$, w postaci szeregu. Dla każdego z tych przedstawień policzyć sumę pierwszych trzech wyrazów, otrzymując w ten sposób przybliżenie rozpatrywanej liczby.
9. Korzystając ze wzoru Taylora-Maclaurina dla funkcji sinus:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

zapisać liczby $\sin 1$, $\sin 2$ oraz $\sin 3$ w postaci szeregu. Podobnie jak w zadaniu 8, dla każdego z tych przedstawień policzyć sumę pierwszych trzech wyrazów, otrzymując w ten sposób przybliżenie rozpatrywanej liczby.
10. Korzystając z przedstawienia funkcji $f(x) = e^x$ w postaci szeregu potęgowego:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wyznaczyć liczbę $\frac{1}{e}$ jako szereg nieskończony. Następnie, biorąc trzy, a potem cztery, jego pierwsze wyrazy, wyznaczyć przybliżone wartości tej liczby.

Janusz Wysoczański