

MATEMATYKA. Chemia I rok. LISTA ZADAŃ NR 11

Przypomnienie wzoru na mnożenie szeregów potęgowych:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{gdzie} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k$$

Przypomnienie: uogólniony symbol dwumianowy: $\binom{s}{0} := 1$, $\binom{s}{n} := \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-(n-1))}{n!}$

1. Wykonać mnożenie następujących szeregów potęgowych:

$$1) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) \quad 2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \quad 3) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right)$$

2. Wyznaczyć szereg Taylora-Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$, korzystając ze wzoru: $\frac{1}{1-x} =$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, dwoma sposobami: (1) różniczkując ten wzór dwukrotnie (2) mnożąc ten wzór stronami przez siebie.

3. Obliczyć $\binom{s}{2}$ oraz $\binom{s}{3}$ dla $s \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$.

4. Wyznaczyć ogólnym wzorem współczynniki dwumianowe $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$.

5. Korzystając z zadania 3, biorąc sumę wyrazów $\sum_{n=0}^3 \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} x^3$ w

szeregu potęgowym funkcji dwumianowej $f(x) = \sqrt{1+x}$, obliczyć przybliżoną wartość następujących pierwiastków, korzystając z podanych przedstawień (dobierając odpowiednie x):

$$(1) \sqrt{2} = \sqrt{4-2} \quad (2) \sqrt{3} = \sqrt{4-1} \quad (3) \sqrt{10} = \sqrt{9+1} \quad (4) \sqrt{6} = \sqrt{9-3} \\ (5) \sqrt{8} = \sqrt{9-1} \quad (6) \sqrt{6} = \sqrt{4+2} \quad (7) \sqrt{15} = \sqrt{16-1} \quad (8) \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4}$$

7. Sprawdzić, że funkcja dana wzorem:

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 3 & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{x}{x} - 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Uzasadnić, że nie jest ona postaci $G(x) + C$ gdzie $F(x) = -\frac{1}{x}$. Pokazać, że F też jest pierwotną funkcji f .

8. Korzystając z definicji pierwotnej uzasadnić, że funkcja dana wzorem $F(x) = \ln|x|$, na dziedzinie $D_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest pierwotną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

9. Wyznaczyć pochodną funkcji $F(x) = \operatorname{tg} x$ i na tej podstawie obliczyć całkę nieoznaczoną: $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

10. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = \arcsin x$ i na tej podstawie obliczyć całkę nieoznaczoną: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

11. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$(1) \frac{x}{x^4+1} dx, \quad (2) \int x e^{x^2} (x^2+1) dx, \quad (3) \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} dx, \quad (4) \int \frac{\ln|\operatorname{arctg} x|}{1+x^2} dx, \\ (5) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx, \quad (6) \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx, \quad (7) \int \cos^3 x dx, \quad (8) \int x^5 e^{x^3} dx.$$

Janusz Wysoczański