

MATEMATYKA - SEMESTR II. LISTA ZADAŃ NR 11a

- Wzór na całkowanie przez podstawienie: jeśli F jest (jakaś) pierwotną funkcji f to dla podstawienia $y = g(x)$ mamy $dy = g'(x) dx$ i wówczas $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy = F(y) = F(g(x))$

1. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie obliczyć całki:

$$(a) \int x e^{x^2} dx, \quad (b) \int x^2(2x^3 + 4)^2 dx, \quad (c) \int x\sqrt{9 - x^2} dx, \quad (d) \int \sin x \cos x dx.$$

2. Obliczyć następujące całki nieoznaczone stosując podstawienia:

$$(a) \int \frac{x^2}{4 - x^6} dx, \quad (b) \int \frac{e^x}{2e^x + 5} dx, \quad (c) \int e^{\sqrt{x}} dx, \quad (d) \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(\sin x)} dx,$$

$$(e) \int x^3 \ln x dx, \quad (f) \int x\sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad (g) \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx, \quad (h) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(i) \int \frac{x}{\sqrt[3]{c + x^2}} dx \quad (j) \int \frac{1 + \ln x}{x} dx$$

- Wzór na całkowanie przez części dla całki nieoznaczonej:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

3. Całkując przez części obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$(a) \int x^3 \ln x dx, \quad (b) \int x^2 e^x dx, \quad (c) \int (x^2 + 2x) \ln x dx, \quad (d) \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx,$$

$$(e) \int x^2 e^x \sin x dx \quad (f) \int \ln^2 x dx, \quad (g) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \quad (h) \int \ln(x^2 + 1) dx,$$

4. Obliczyć następujące całki nieoznaczone, stosując rozkład na ułamki proste:

$$(a) \int \frac{x^3}{x+1} dx, \quad (b) \int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} dx, \quad (c) \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx, \quad (d) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$(e) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx \quad (f) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx \quad (g) \int \frac{1}{x^4 - 1} dx \quad (h) \int \frac{1}{x(1 + x^2)} dx$$

5. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$(a) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} dx \quad (b) \int \frac{3x - 5}{-3x^2 + 6x + 9} dx \quad (c) \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx \quad (e) \int \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx \quad (f) \int \sqrt{x^2 + 4x} dx$$

6. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$(a) \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \quad (b) \int \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} dx \quad (c) \int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx \quad (d) \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{5 - 3 \cos x} dx \quad (f) \int \operatorname{tg}^3 x dx \quad (g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad (h) \int \sin^4 x dx$$