

## MATEMATYKA - SEMESTR II. ChP 1, ICh 1. LISTA ZADAŃ NR 12

• Aby obliczyć całkę oznaczoną  $\int_a^b f(x)dx$  wystarczy znaleźć całkę nieoznaczoną (a w zasadzie jakąś jedną pierwotną)  $F(x) = \int f(x)dx$  i podstawić do niej wartości graniczne, czyli wówczas  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .

1. Znajdując całki nieoznaczone danych funkcji podcałkowych  $f$  obliczyć następujące całki:

$$(a) \int_a^b dx, \quad (b) \int_0^1 e^x dx, \quad (c) \int_1^5 (x-1)^3 dx, \quad (d) \int_1^3 2x^3 dx, \quad (e) \int_1^e x \ln x dx,$$

$$(f) \int_a^b x dx, \quad (g) \int_1^4 \frac{1}{x} dx, \quad (h) \int_0^\pi \sin x dx \quad (i) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (j) \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx$$

• Jeśli funkcja podcałkowa jest postaci  $\frac{g'(x)}{g(x)}$  to obliczamy całkę korzystając ze wzoru:

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(b)| - \ln |g(a)| = \ln \left| \frac{g(b)}{g(a)} \right|.$$

2. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć całki:

$$(a) \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx, \quad (b) \int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+2} dx, \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx, \quad (d) \int_0^2 \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx, \quad (e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cos x} dx.$$

Uwaga: w przykładzie (e) jest  $g(x) = \operatorname{tg} x$ .

• Wzór na całkowanie przez części dla całki oznaczonej:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

3. Całkując przez części obliczyć następujące całki:

$$(a) \int_1^4 \ln x dx, \quad (b) \int_0^2 x^2 e^x dx, \quad (c) \int_1^3 x^2 \ln x dx, \quad (d) \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx, \quad (e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

• Wzór na całkowanie przez podstawienie dla całki oznaczonej: jeśli funkcja  $F$  jest jakąś pierwotną funkcji  $f$ , a funkcja podcałkowa jest postaci  $f(g(x))g'(x)$ , to

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = F(g(b)) - F(g(a))$$

4. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie obliczyć całki:

$$(a) \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx, \quad (b) \int_0^2 x e^{x^2} dx, \quad (c) \int_0^3 x^2 (2x^3 + 4)^2 dx, \quad (d) \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx, \quad (e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx.$$

• Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła i określona na przedziale  $[A, B]$ , to funkcja określona dla  $a, x \in [A, B]$  przez całkę oznaczoną  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$  jest pierwotną funkcji  $f$ ; czyli  $F'(x) = f(x)$ .

• Jeśli funkcja  $F$  jest określona jako całka oznaczona postaci  $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$  dla pewnej funkcji  $g$ , to jej pochodna wyraża się wzorem:  $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

5. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$(a) F(x) = \int_1^x t(1+t^2)^5 dt, \quad (b) F(x) = \int_0^{x^2} t^{-3} dt, \quad (c) F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt$$

$$(d) F(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2) dt, \quad (e) F(x) = \int_0^{\sqrt{1+x^2}} t^2 dt, \quad (f) F(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{1+t} dt.$$

Janusz Wysoczański