MATEMATYKA - SEMESTR II. ChP 1, ICh 1. LISTA ZADAŃ NR 13

• Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $(a,b]$ i nieograniczona $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$, to całkę niewłaściwą z tej funkcji określamy jako granicę $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$, o ile ta granica istnieje.

• Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale nieskończonym $[a,+\infty)$, to całkę niewłaściwą z tej funkcji określamy jako granicę $\lim_{c\to +\infty}\int_c^{+\infty} f(x)dx$ o ile ta granica istnieje.

1. Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

a. Całki oznaczone niewłaściwe (funkcji nieograniczonych)

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}},\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 2x},\quad \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}},\quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}},\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x+x^2},$$

b. Całki oznaczone niewłaściwe (w przedziale nieskończonym)

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{3}}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4},\quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2},\quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^6},\quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx,$$

• Jeśli funkcja f jest nieujemna $f\geq 0$ i ciągła na przedziale $D=[a,b]$, to objętość V_X bryły obrotowej powstałej przez obrót jej wykresu wokół osi OX jest dana wzorem: $V_X=\pi\int_a^b [f(x)]^2\ dx.$

2. Znaleźć objętość piramidy (stożka o podstawie kwadratowej) o wysokości 4 i boku podstawy 3.

3. Wyznaczyć objętości brył obrotowych powstałych w wyniku obrotu wokół osi OX wykresów nastpujcych funkcji f o dziedzinach D:

$f(x)=x^{\frac{2}{3}},\ D=[0,1],\quad f(x)=1+x^2,\ D=[-1,2],\quad f(x)=\sqrt{3-x},\ D=[0,\sqrt{3}],$

$f(x)=x\sqrt[4]{1+x^3},\ D=[1,2],\quad f(x)=\sqrt{x}\sqrt[4]{1-x},\ D=[0,1],\quad f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x},\ D=[0,1]$

4. Wyznaczyć objętości brył obrotowych powstałych w wyniku obrotu wokół osi OX wykresów następujących funkcji f o dziedzinach D:

$f(x)=\cos x,\ D=\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\quad f(x)=\cos x,\ D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad f(x)=\sin x,\ D=[0,\pi],$

$f(x)=\sqrt{1+x^2},\ D=[1,2],\quad f(x)=x(3-x),\ D=[0,3],\quad f(x)=\sqrt{1-x^2},\ D=[-1,1]$

• Jeśli funkcja f jest nieujemna $f\geq 0$ i ciągła na przedziale $D=[a,b]$ dla $0\leq a<b$, to objętość V_Y bryły obrotowej powstałej przez obrót jej wykresu wokół osi OY jest dana wzorem:

$$V_Y=2\pi\int_a^b xf(x)\ dx.$$

5. Wyznaczyć objętości brył obrotowych powstałych w wyniku obrotu wokół osi OY wykresów następujących funkcji f o dziedzinach D:

$f(x)=\frac{4}{x^3},\ D=[1,3],\quad f(x)=(x-1)^2,\ D=[0,2],\quad f(x)=2x-\frac{3}{x},\ D=[2,3],$

$f(x)=\sqrt{1+x^2},\ D=\left[0,\sqrt{3}\right],\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ D=\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right],\quad f(x)=\sin x^2,\ D=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

• Długość L krzywej będącej wykresem funkcji f na przedziale $[a,b]$ jest dana wzorem:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx.$$

6. Wyznaczyć długość krzywej będącej wkresem funkcji f w podanym przedziale:

$f(x)=2x+3,\ 1\leq x\leq 5,\quad f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\ 1\leq x\leq 4,\quad f(x)=(2x-1)^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}\leq x\leq 4,$

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}},\ 0\leq x\leq 3,\quad f(x)=\ln(\cos x),\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{4},\quad f(x)=x^3+\frac{1}{12x},\ 1\leq x\leq 3$

Janusz Wysoczański