MATEMATYKA - SEMESTR II. ChP 1, ICh 1. LISTA ZADAŃ NR 14

• Dla ustalonej liczby $c \in \mathbb{R}$ poziomicą funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ nazywamy zbiór takich punktów $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ które spełniają równanie $f(x,y) = c$.

1. Wyznaczyć dziedziny oraz dowolne 3 (niepuste) poziomice następujących funkcji:

1) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ 2) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ 3) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 5) $f(x,y) = xy$ 6) $f(x,y) = \sin xy$

7) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ 8) $f(x,y) = x$ 9) $f(x,y) = y$

10) $f(x,y) = x + y$ 11) $f(x,y) = x - y$ 12) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

13) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ 14) $f(x,y) = x^2$ 15) $f(x,y) = \cos x$

16) $f(x,y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ 17) $f(x,y) = x^2 - y^2$ 18) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$

• Wykresem funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ jest powierzchnia w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z punktów postaci $(x, y, f(x,y))$, dla $(x,y) \in D_f$ z dziedziny funkcji f.

2. Naszkicować wykresy funkcji:

1) $f(x,y) = x + 2y$ 2) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

3) $f(x,y) = x - y + 1$ 4) $f(x,y) = \sqrt{x + 4y^2}$

3.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x - y + 2)$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} (2x^2 - 3xy + y^2)$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{xy}$ 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2 + 4xy + 4y^2}{1 + y}$ 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin xy}{y}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. Uzasadnić, że nie istnieją następujące granice:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x}$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x + y}$ 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x + y}{x^2 - y^2}$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1, czyli $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ oraz rzędu 2, czyli $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$ i $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$ podanych funkcji, sprawdzając czy jest równość $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$:

1) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ 2) $f(x,y) = \cos xy$ 3) $f(x,y) = \ln xy$

4) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ 5) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ 6) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

7) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 8) $f(x,y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ 9) $f(x,y) = x^2 y^3$

10) $f(x,y) = y^{x^2}$

6. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2 dla funkcji:

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

• Pochodną funkcji złożonej $h(t) = f(x(t), y(t))$ obliczamy ze wzoru: $h'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$

7. Obliczyć $h'(t)$, gdzie $h(t) = f(x(t), y(t))$ dla

1) $f(x,y) = 2x^3 - 3y^2,\ x(t) = \sqrt{t},\ y(t) = \sin t;$ 2) $f(x,y) = \ln(2x^3 + y^2),\ x(t) = e^t,\ y(t) = \sqrt[3]{t}$

3) $f(x,y) = \sqrt{2x - 3y},\ x(t) = \ln t,\ y(t) = 1 - t^2$ 4) $f(x,y) = \sin xy,\ x(t) = \sqrt{t},\ y(t) = t^2$

Janusz Wysoczański