

MATEMATYKA - SEMESTR II. ChP 1, ICh 1. LISTA ZADAŃ NR 15

- Dla funkcji złożonej $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ jej pochodne cząstkowe są dane wzorami:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

- Obliczyć pochodne cząstkowe następujących funkcji złożonych $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, dla:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy, & x(u, v) &= uv, & y(u, v) &= u + v \\ f(x, y) &= xy, & x(u, v) &= \sin(u + v), & y(u, v) &= \cos(u - v) \\ f(x, y) &= xy, & x(u, v) &= u - v, & y(u, v) &= u + v \\ f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x(u, v) &= \sin(u + v), & y(u, v) &= \cos(u - v) \end{aligned}$$

- Punkt $(a, b) \in D_f$ jest *punktem krytycznym* funkcji f jeśli $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

- Wyznaczyć punkty krytyczne następujących funkcji:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin xy & f(x, y) &= \cos x + \cos y & f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} & f(x, y) &= e^{xy} \\ f(x, y) &= \cos xy & f(x, y) &= \sin x \cdot \sin y & f(x, y) &= \sqrt{1 + \sin^2 x} & f(x, y) &= \ln \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

- Punkt $(a, b) \in D_f$ jest *punktem siodłowym* funkcji f jeśli ta funkcja ma w tym punkcie maksimum w kierunku jakiegoś wektora \vec{u} i ma minimum w kierunku innego wektora \vec{v} (to znaczy że $D_{\vec{u}}f(a, b) = 0 = D_{\vec{v}}f(a, b)$ i pochodne te odwrotnie zmieniają znak).

- Niech $\mathbf{D}(f)(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right]^2$. Jeśli (a, b) jest punktem krytycznym funkcji f to mamy następujące możliwości istnienia ekstremum lokalnego w tym punkcie:

Max. Jeśli $\mathbf{D}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ to f ma lokalne maksimum w (a, b) .

Min. Jeśli $\mathbf{D}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ to f ma lokalne minimum w (a, b) .

Siodło. Jeśli $\mathbf{D}(f)(a, b) < 0$ to (a, b) jest punktem siodłowym funkcji f .

- Wyznaczyć ekstema lokalne oraz punkty siodłowe następujących funkcji:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2x + y^2)e^x & f(x, y) &= \cos xy & f(x, y) &= \ln xy \\ f(x, y) &= (x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2 & f(x, y) &= \sin xy & f(x, y) &= \sqrt{xy} \\ f(x, y) &= (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 & f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

- Funkcja $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ określona jako $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ definiuje krzywą na płaszczyźnie (jeśli funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są różniczkowalne).

- Wyznaczyć krzywe na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , określone przez następujące funkcje $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, dla:

$$\begin{aligned} \text{a) } x(t) &= \cos t, \quad y(t) = 2 \sin t, & \text{b) } x(t) &= t \cos t, \quad y(t) = t \sin t, & \text{c) } x(t) &= t, \quad y(t) = t^2, \\ \text{d) } x(t) &= 1 + \cos t, \quad y(t) = 2 - \sin t, & \text{e) } x(t) &= e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t, & \text{f) } x(t) &= t, \quad y(t) = 2t \end{aligned}$$

- Funkcja $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ określona jako $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definiuje krzywą w przestrzeni trójwymiarowej (jeśli funkcje $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ są różniczkowalne).

- Wyznaczyć (to znaczy spróbować naskicować) krzywe w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 , określone przez następujące funkcje $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dla:

$$\begin{aligned} \text{a) } x(t) &= \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t, & \text{b) } x(t) &= \cos t, \quad y(t) = t \sin t, \quad z(t) = t, \\ \text{c) } x(t) &= 2t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2 & \text{d) } x(t) &= e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-t} \sin t, \quad z(t) = t. \end{aligned}$$

wskazówka: zbadać jakie relacje spełniają funkcje współrzędne x, y, z .