MATEMATYKA - SEMESTR II. ChP 1, ICh 1. LISTA ZADAŃ NR 16

- *Postacią trygonometryczną* liczby zespolonej $z = a + b\mathbf{i}$ nazywamy przedstawienie $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, gdzie $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ jest *modułem*, a φ jest *argumentem* tej liczby. Sprzężeniem liczby z nazywamy liczbę $\bar{z} = a + (-b)\mathbf{i} = a - b\mathbf{i}$.

1. Korzystając z definicji $\mathbf{i}^2 = -1$ wyznaczyć kolejne potęgi jednostki urojonej $\mathbf{i}$, czyli liczby zespolone postaci $\mathbf{i}^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Wyznaczyć wszystkie możliwe postacie trygonometryczne jednostki urojonej $\mathbf{i}$.

3. Wyznaczyć moduły oraz wszystkie możliwe argumenty liczb zespolonych z dla:

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$ b) $z = 1 - \mathbf{i}$ c) $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ d) $z = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ e) $z = -1 = -1 + 0\mathbf{i}$
   f) $z = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2}$ g) $z = 2 + 2\mathbf{i}$ h) $z = 2 - 2\mathbf{i}$ i) $z = -3 - 3\mathbf{i}$ j) $z = -1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$

- Liczba zespolona $w = c + d\mathbf{i}$ nazywa się *odwrotną* do $z = a + b\mathbf{i}$ jeśli spełnia warunek $z \cdot w = 1$; czyli jeśli $(ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i} = 1 + 0\mathbf{i}$.

4. Wyznaczyć liczbę odwrotną do liczby zespolonej z dla

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$ b) $z = 1 - \mathbf{i}$ c) $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ d) $z = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ e) $z = 1 + 2\mathbf{i}$ f) $z = 2 - 3\mathbf{i}$

- Dla liczb zespolonych $z = a + b\mathbf{i}$ oraz $w = c + d\mathbf{i}$ wyrażenie $|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ jest odległością na płaszczyźnie punktów (a, b) i (c, d).

5. Wyznaczyć (i narysować na płaszczyźnie) zbiór liczb zespolonych z spełniających równanie:

   a) $|z - 1| = 1$ b) $|z + 2 - \mathbf{i}| = 3$ c) $|z - 1| = |z + 1|$ d) $|z + 4 - 2\mathbf{i}| = 3$ e) $|z - \bar{z}| = 2$

- Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej $z = r_1(\cos\varphi_1 + \mathbf{i}\sin\varphi_1)$, $w = r_2(\cos\varphi_2 + \mathbf{i}\sin\varphi_2)$ jest dane wzorem $zw = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

6. Wykonać mnożenie następujących liczb zespolonych $z, w \in \mathbb{C}$, przedstawiając je w postaci trygonometrycznej, dla:

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$, $w = 2 - 2\mathbf{i}$, b) $z = 3 - 3\mathbf{i}\sqrt{3}$, $w = 2 + 2\mathbf{i}$, c) $z = 1 - \mathbf{i}$, $w = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$

- Potęgowanie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ jest dane wzorem de Moivre'a: $z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathbf{i}\sin n\varphi)$

7. Wyznaczyć potęgi z^n liczby zespolonej z dla:

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$ b) $z = 1 - \mathbf{i}$ c) $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ a) $z = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ e) $z = 2 - 2\mathbf{i}\sqrt{3}$ f) $z = -2\sqrt{3} - 2\mathbf{i}$

- Pierwiastkiem zespolonym stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w, która spełnia równanie $w^n = z$. Jeśli $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ jest w postaci trygonometrycznej, to każdy pierwiastek stopnia n wyraża się wzorem $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

8. Wyznaczyć pierwiastki stopnia $n = 3$ z liczby zespolonej z, dla:

   a) $z = 1$ b) $z = -1$ c) $z = \mathbf{i}$ d) $z = -\mathbf{i}$
   e) $z = 1 + \mathbf{i}$ f) $z = 1 - \mathbf{i}$ g) $z = -1 + \mathbf{i}$ h) $z = -1 - \mathbf{i}$

9. Wyznaczyć pierwiastki zespolone stopnia $n = 4$ z liczby zespolonej z, dla

   a) $z = 16$ b) $z = -16$ c) $z = 8\mathbf{i}$ d) $z = -9\mathbf{i}$
   e) $z = 16 + 16\mathbf{i}$ f) $z = 9 - 9\mathbf{i}$ g) $z = -4 + 4\mathbf{i}$ h) $z = -4 - 4\mathbf{i}$

Janusz Wysoczański