MATEMATYKA - SEMESTR II. ChŚ , ChB. LISTA ZADAŃ NR 18

- Dla funkcji złożonej $H(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ jej **pochodne cząstkowe** są dane wzorami:
$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

1. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial H}{\partial u}$ oraz $\frac{\partial H}{\partial v}$ funkcji złożonej $H(u,v) := f(x(u,v), y(u,v))$, gdzie:
   (a) $f(x,y) = ye^x$, $\quad x(u,v) = u^2 + v^2$, $\quad y(u,v) = u^2 - v^2$
   (b) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$, $\quad x(u,v) = u + v$, $\quad y(u,v) = uv$
   (c) $f(x,y) = e^x + e^y$, $\quad x(u,v) = u^2 + v^2$, $\quad y(u,v) = u^2 - v^2$

- Dla funkcji złożonej $h(t) = f(x(t), y(t))$ jej **pochodna** jest dana wzorem:
$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$$

2. Obliczyć pochodną $h'(t)$ jeśli:
   (a) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3$, $\quad x(t) = \sin t$, $\quad y(t) = \cos t$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$, $\quad x(t) = \cos t$, $\quad y(t) = \sin t$.
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$, $\quad x(t) = \sqrt{t}$, $\quad y(t) = 2t + 1$.

- **Różniczką zupełną** funkcji $F(x,y)$ nazywamy wyrażenie $dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$.

3. Wyznaczyć różniczki zupełne dF dla
   (a) $F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (b) $F(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - y^4$, (c) $F(x,y) = \sin xy$.

- Wyrażenie $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ jest **różniczką zupełną** pewnej funkcji $F(x,y)$ jeśli: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

4. Znaleźć funkcję $F(x,y)$ której różniczką zupełną jest wyrażenie $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, gdzie:
   (a) $P(x,y) = 2x - 4y, Q(x,y) = -4x + y$;
   (b) $P(x,y) = 6x^2 + 3y^2, Q(x,y) = 6xy - 3y^2$;
   (c) $P(x,y) = 3(x^2 - y^2), Q(x,y) = -6xy + 2$;

- Przybliżone obliczanie wartości funkcji przy pomocy różniczki zupełnej jest dane wzorem: $f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$ czyli
$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

5. Korzystając z tego wzoru obliczyć w sposób przybliżony wyrażenia:
   (a) $\frac{2,01357}{1,00245}$, (b) $\frac{3,0012}{1,0010}$ (c) $\frac{5,00454}{2,0013}$ (d) $3,00053 \cdot 2,00103$ (e) $1,0031 \cdot 2,00201$.
   W każdym z przykładów dobrać odpowiednią funkcję $f(x,y)$, wyznaczyć x_0, y_0 oraz przyrosty dx i dy.

Janusz Wysoczański