Lista 11. Rozwiązanie zadania 2b czyli równania $(x+y)y' + y = 0$.

1. **Podstawienie:** $y = xu$ Otrzymujemy $y' = u + xu'$
2. **Nowa postać równania:** $(x+xu)(u+xu') + xu = 0$.
3. **Dzielimy przez x:** $(1+u)(u+xu') + u = 0$.
4. **Przekształcamy:**

$$\begin{aligned}
u + xu' &= -\frac{u}{1+u} \\
x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -u - \frac{u}{1+u} = -\frac{u(u+2)}{u+1} \\
\frac{(u+1)}{u^2+2u}\mathrm{d}u &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\frac{(u+1)}{u^2+2u}\mathrm{d}u &=
\end{aligned}$$

5. **Obliczamy całki:**

$$\begin{aligned}
-\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\ln|x| + c = \ln\frac{1}{|x|} + c \\
\text{podstawienie } w &= u^2 + 2u, \mathrm{d}w = 2(u+1)\mathrm{d}u \\
\int \frac{(u+1)}{u^2+2u}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2}\ln|w| = \frac{1}{2}\ln|u^2+2u|
\end{aligned}$$

6. **Porównujemy obliczone całki:**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln|u^2+2u| &= \ln\frac{1}{|x|} + c \mid \cdot 2 \\
\ln|u^2+2u| &= \ln\frac{1}{x^2} + 2c = \frac{1}{x^2} + c \\
|u^2+2u| &= \frac{1}{x^2}\cdot e^c \quad e^c \to C \in \mathbb{R} \\
u^2 + 2u &= \frac{C}{x^2}
\end{aligned}$$

7. **Rozwiązujemy równanie kwadratowe względem u:**

$$\begin{aligned}
0 &= u^2 + 2u - \frac{C}{x^2} \\
\Delta &= 4 + \frac{4C}{x^2} = 4\left(1 + \frac{C}{x^2}\right) \\
\Delta \geq 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{C}{x^2} \geq 0
\end{aligned}$$

8. **Przypadki:**

$$\begin{aligned}
C > 0 &\Rightarrow \Delta = 4 + \frac{4C}{x^2} \geq 1 > 0 \\
C = 0 &\Leftrightarrow u(u+2) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0 \quad \text{lub} \quad u \equiv -2 \quad \text{funkcje stałe} \\
C < 0 &\Rightarrow \Delta = 4 + \frac{4C}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{-C}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \geq -C = |C|
\end{aligned}$$

9. **Wyznaczamy funkcje $u_C(x)$ dla $C \in \mathbb{R}$:**

10. **Podstawiamy do funkcji $y_C(x) = xu_C(x)$:**

$$\begin{aligned}
C > 0 \quad &\Rightarrow \quad u_C^{\pm}(x) = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+\frac{C}{x^2}}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+\frac{C}{x^2}}, \quad D_{u_C^{\pm}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
C > 0 \quad &\Rightarrow \quad y_C^{\pm}(x) = xu_C^{\pm}(x) = -x \pm \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+C}, \quad D_{y_C^{\pm}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
D_{y_C^{\pm}} \quad &= \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)
\end{aligned}$$

$$C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_0(x) \equiv 0 \quad \text{lub} \quad y_0(x) \equiv -2x, \quad D_{y_0} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
C < 0 \quad &\Rightarrow \quad u_C^{\pm}(x) = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+\frac{C}{x^2}}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+\frac{C}{x^2}} \\
C < 0 \quad &\Rightarrow \quad D_{u_C^{\pm}} = \{x^2 \geq -C = |C| > 0\} = (-\infty, -\sqrt{|C|}] \cup [\sqrt{|C|}, +\infty) \\
C < 0 \quad &\Rightarrow \quad y_C^{\pm}(x) = xu_C^{\pm}(x) = -x \pm \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+C}, \quad D_{y_C^{\pm}} = (-\infty, -\sqrt{|C|}] \cup [\sqrt{|C|}, +\infty).
\end{aligned}$$

11. **Uwaga:** Zauważmy, że $x = 0 \notin D_{y_C^{\pm}}$ dla każdego $C \in \mathbb{R}$

12. **Przypadki szczególne: y_C^+ oraz y_C^-:**

   - $C > 0$ wówczas

$$y_C^{\pm}(x) = \begin{cases} -x \pm \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (0, +\infty) \\ -x \mp \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} y_C^{\pm}(x) = \pm\sqrt{C}, \qquad \lim_{x \to 0^-} y_C^{\pm}(x) = \mp\sqrt{C}$$

Zauważmy także, że dla $C > 0$ funkcje $y_C^{\pm}(x)$ są **nieparzyste**, ponieważ

$$\begin{aligned}
x > 0 \Rightarrow -x < 0 \quad &\Rightarrow \quad y_C^{\pm}(-x) = -(-x) \mp \sqrt{x^2+C} = -\left(-x \pm \sqrt{x^2+C}\right) = -y_C^{\pm}(x) \\
x < 0 \Rightarrow -x > 0 \quad &\Rightarrow \quad y_C^{\pm}(-x) = -(-x) \pm \sqrt{x^2+C} = -\left(-x \mp \sqrt{x^2+C}\right) = -y_C^{\pm}(x)
\end{aligned}$$

   (a) Dla funkcji y_C^+ mamy wzory

$$y_C^{+}(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (0, +\infty) \\ -x - \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} y_C^{+}(x) \quad &= \quad \sqrt{C}, \qquad \lim_{x \to +\infty} y_C^{+}(x) = 0 \\
\lim_{x \to 0^-} y_C^{+}(x) \quad &= \quad -\sqrt{C}, \qquad \lim_{x \to -\infty} y_C^{+}(x) = 0
\end{aligned}$$

Na przedziale $(0, +\infty)$ funkcja $y_C^+(x)$ maleje od $\sqrt{C}$ do 0, a na przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja $y_C^+(x)$ maleje do $-\sqrt{C}$. Funkcja ta ma asymptotę poziomą $y = 0$ w $\pm\infty$.

(b) Podobnie dla funkcji y_C^- mamy wzory

$$y_C^-(x) = \begin{cases} -x - \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (0, +\infty) \\ -x + \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} y_C^-(x) = -\sqrt{C}, \qquad \lim_{x\to 0^-} y_C^-(x) = \sqrt{C}.$$

Ponadto, funkcja $y_C^-(x)$ ma asymptotę ukośną $y = -2x$ zarówno w $+\infty$ jak i w $-\infty$.

- $C < 0$ wówczas

$$y_C^\pm(x) = \begin{cases} -x \pm \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in [\sqrt{|C|}, +\infty) \\ -x \mp \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{|C|}] \end{cases}$$

Zauważmy także w przypadku $C > 0$ funkcje $y_C^\pm(x)$ są **nieparzyste**, ponieważ

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \quad \Rightarrow \quad y_C^\pm(-x) = -(-x) \mp \sqrt{x^2+C} = -\left(-x \pm \sqrt{x^2+C}\right) = -y_C^\pm(x)$$
$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \quad \Rightarrow \quad y_C^\pm(-x) = -(-x) \pm \sqrt{x^2+C} = -\left(-x \mp \sqrt{x^2+C}\right) = -y_C^\pm(x)$$

(a) Dla $C < 0$ i funkcji y_C^+ mamy wzory

$$y_C^+(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in [\sqrt{|C|}, +\infty) \\ -x - \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{|C|}] \end{cases}$$

Ponadto dla $C < 0$ jest $|C| + C = 0$, więc

$$\begin{aligned} y_C^+(\sqrt{|C|}) &= -\sqrt{|C|} + \sqrt{|C|+C} = -\sqrt{|C|}, \\ y_C^+(-\sqrt{|C|}) &= \sqrt{|C|} + \sqrt{|C|+C} = \sqrt{|C|}. \end{aligned}$$

Analogicznie jak dla $C > 0$, także dla $C < 0$ jest asymptota pozioma w $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} y_C^+(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} y_C^+(x) = 0.$$

Na przedziale $[\sqrt{|C|}, +\infty)$ funkcja $y_C^+(x)$ jest ujemna i rośnie od $-\sqrt{|C|}$ do 0, a na przedziale $(-\infty, -\sqrt{|C|}]$ jest dodatnia i rośnie od 0 do $\sqrt{|C|}$.

(b) Podobnie, dla $C < 0$ i funkcji y_C^- mamy wzory

$$y_C^-(x) = \begin{cases} -x - \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in [\sqrt{|C|}, +\infty) \\ -x + \sqrt{x^2+C} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{|C|}] \end{cases}$$

W szczególności

$$y_C^-(\sqrt{|C|}) = -\sqrt{|C|}, \quad y_C^-(-\sqrt{|C|}) = \sqrt{|C|}.$$

Funkcja $y_C^-(x)$ ma także asymptotę ukośną $y = -2x$ zarówno w $+\infty$ jak i w $-\infty$.