

MATEMATYKA. I rok Chemii. LISTA ZADAŃ 00-PODSTAWY

- Dla liczb dodatnich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 1$) jest $a^b = c$ wtedy i tylko wtedy gdy $\log_a c = b$.
- Dla liczb dodatnich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 1 \neq b$) mamy wzór $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.
- Dla liczby dodatniej $a \in \mathbb{R}$ i liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ oznaczamy $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

1. Uprościć wyrażenia

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}, \quad \frac{\sqrt[5]{4}\sqrt[5]{8}}{\sqrt[3]{2}}, \quad \log_3 6 \cdot \log_3 12,$$

$$\frac{\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{3}}, \quad 2^{\log_8 4}, \quad \log \sqrt[3]{100} \cdot \log \sqrt{10},$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}, \quad 8^{\log_2 12}, \quad \log\left(\frac{9}{6} - \frac{21}{15}\right)$$

$$\frac{\sqrt[5]{64}\sqrt[9]{128}}{\sqrt[7]{32}}, \quad 4^{\log_{1/2} 16}, \quad \log_2 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 16$$

- Dla liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ wyrażenie $|a - b|$ oznacza odległość punktów odpowiadającym tym liczbom na osi liczbowej.

2. Rozwiązać nierówności i zaznaczyć zbiór rozwiązań na osi liczbowej

$$|x - 7| < 3, \quad |x^2 + 2| \leq 2, \quad |1 - 2x| + |2x - 6| = x,$$

$$|x^2 - 2| \leq 2, \quad \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \geq 3, \quad |x^2 - 7x + 8| = 2,$$

$$\left| \frac{2x+1}{3x-1} \right| \leq 2, \quad \left| \frac{5x-3}{2x+7} \right| < 2, \quad |3-x| \leq |2x+4|,$$

$$|x+1| = |x-1|, \quad |x-1| = |x+3|, \quad x^2 - |x-1| - 1 \leq 0.$$

3. Rozwiązać równania:

$$(a) \quad 2 + \frac{3-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} + \frac{6-x}{3x^2-12}, \quad \frac{1}{128} \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}, \quad \log_3(5x+2) - \log_3(8-x) = 2,$$

$$\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0, \quad \log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0,$$

$$(b) \quad x^4 + 5x^2 - 6 = 0,$$

- Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ leży na okręgu jednostkowym jeśli $a^2 + b^2 = 1$. Współrzędne kartezjańskie tego punktu definiują funkcje trygonometryczne parametru $t \in \mathbb{R}$: $a = \cos t$, $b = \sin t$, gdzie t odpowiada łukom na tym okręgu od punktu $(1, 0)$ do punktu (a, b) .

- Jeden punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ na okręgu jednostkowym wyznacza nieskończenie wiele takich liczb t , z których jedna jest w przedziale $t_0 \in [0, 2\pi)$ a pozostałe są postaci $t_k = t_0 + 2k\pi$, dla dowolnej liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$.

4. Rozwiązać równania

$$\begin{aligned} \sin x = -1, \quad \cos x = -1, \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt{2} \sin x + \operatorname{ctg} x = 0, \\ \sin x = 1, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin^4 x + 5 \cos 2x + 4 = 0, \end{aligned}$$

5. Rozwiązać nierówności

$$\begin{aligned} x^2 + 2x > 3x^2, \quad \frac{2x+1}{3x-5} < 0, \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1, \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} > 9 \cdot 3^{2x-1}, \quad \log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3, \\ \frac{3}{x+1} > \frac{2}{x-2}, \quad 2 \cos^2 x > \frac{3}{2}, \quad 5 \sin^2 x + \sin^2 2x > 4 \cos 2x. \end{aligned}$$

- Symbol dwumianowy i wzór dwumianowy:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

6. Obliczyć symbole dwumianowe:

$$\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{7}{3}, \binom{7}{4}, \binom{7}{5}, \binom{8}{4}, \binom{10}{5};$$

7. Wyznaczyć wielomiany poprzez rozwinięcie odpowiedniego wzoru dwumianowego:

$$\begin{aligned} (2x-1)^4, \quad (3x+2)^3, \quad (x-3)^5, \quad \frac{x^3-1}{x-1}, \\ (x^2-3)^4, \quad (x^3-3x)^3, \quad (x^2-2x)^4, \quad \frac{x^4-1}{x-1}, \\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^4(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4; \end{aligned}$$

8. Obliczyć podane sumy korzystając ze wzoru dwumianowego:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \binom{4}{k}, \quad \sum_{k=0}^5 \binom{6}{k}, \quad \sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k}, \\ \sum_{k=1}^5 \binom{6}{k}, \quad \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k}, \quad \sum_{k=0}^7 (-1)^{k+1} \binom{7}{k}, \\ \sum_{k=2}^9 \binom{10}{k+1}, \quad \sum_{k=2}^7 \binom{8}{k-1}, \quad \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{4}{k} \end{aligned}$$

- Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie: $ax + by + c = 0$.

- Ogólne równanie okręgu o środku $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ i promieniu R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 = 0$.
 - Odległość punktów $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ wynosi $\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$
9. Uzasadnić, że równanie $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ wyznacza okrąg, a nierówność $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 \leq 0$ wyznacza koło. Znaleźć ich środki i promienie.
 10. Wyznaczyć punkty przecięcia okręgu zadanego równaniem $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ i prostej o równaniu $x + y = 3$.
 11. Wyznaczyć równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ w punktach $(3, 2)$ oraz w $(-3, 2)$.
 12. Znaleźć odległość pomiędzy punktami P i Q na płaszczyźnie, jeśli: $P = (\frac{1}{2}, -7)$, $Q = (\frac{7}{2}, -3)$, oraz $P = (-2, -1)$, $Q = (-3, 4)$.
 13. Sprawdzić, czy punkty $P = (20, 1)$, $Q = (-1, 2)$ i $S = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ leżą na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 50$.
 14. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-\sqrt{3}, 11)$ i przecinającej oś OX pod kątem 30° .