

- Liczby zespolone są zdefiniowane w postaci algebraicznej $z = a + bi$.
 - Liczbę zespoloną można też przedstawić w postaci trygonometrycznej $z = a + bi = r \cdot (\cos t + i \sin t)$, gdzie $a = r \cos t$, $b = r \sin t$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Korzystając z definicji $i^2 = -1$ wyznaczyć kolejne potęgi jednostki urojonej i , czyli liczby zespolone postaci i^n dla $n \in \mathbb{N}$.
 - Wyznaczyć wszystkie możliwe postacie trygonometryczne jednostki urojonej i .
 - Wyznaczyć moduły oraz wszystkie możliwe argumenty liczb zespolonych z dla:
 - $z = 1 + i$
 - $z = 1 - i$
 - $z = 1 + i\sqrt{3}$
 - $z = 1 - i\sqrt{3}$
 - $z = -1 = -1 + 0i$
 - $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 - $z = 2 + 2i$
 - $z = 2 - 2i$
 - $z = -3 - 3i$
 - $z = -1 - i\sqrt{3}$
 - Liczba zespolona $w = c + di$ nazywa się *odwrotną* do $z = a + bi$ jeśli spełnia warunek $z \cdot w = 1$; czyli jeśli $(ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i$.
 - Wyznaczyć liczbę odwrotną do liczby zespolonej z dla
 - $z = 1 + i$
 - $z = 1 - i$
 - $z = 1 + i\sqrt{3}$
 - $z = 1 - i\sqrt{3}$
 - $z = 1 + 2i$
 - $z = 2 - 3i$
 - Wyznaczyć (i narysować na płaszczyźnie) zbiór liczb zespolonych z spełniających równanie:
 - $|z - 1| = 1$
 - $|z + 2 - i| = 3$
 - $|z - 1| = |z + 1|$
 - $|z + 4 - 2i| = 3$
 - $|z - \bar{z}| = 2$

wskazówka: wyrażenie $|z - w|$ jest odległością liczb zespolonych z i w .
-

- Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej $z = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $w = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ jest dane wzorem $zw = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
- Wykonać mnożenie następujących liczb zespolonych $z, w \in \mathbb{C}$, przedstawiając je w postaci trygonometrycznej, dla:
 - $z = 1 + i$, $w = 2 - 2i$,
 - $z = 3 - 3i\sqrt{3}$, $w = 2 + 2i$,
 - $z = 1 - i$, $w = 1 + i\sqrt{3}$
-

- Potęgowanie (wzór de Moivre'a:) jeśli $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ to $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
- Wyznaczyć potęgi z^n liczby zespolonej z dla:
 - $z = 1 + i$
 - $z = 1 - i$
 - $z = 1 + i\sqrt{3}$
 - $z = 1 - i\sqrt{3}$
 - $z = 2 - 2i\sqrt{3}$
 - $z = -2\sqrt{3} - 2i$
 - Pierwiastkiem zespolonym stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w , która spełnia równanie $w^n = z$. Jeśli $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ jest w postaci trygonometrycznej, to każdy pierwiastek stopnia n wyraża się wzorem $w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$, gdzie $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
 - Wyznaczyć pierwiastki stopnia $n = 3$ z liczby zespolonej z , dla:
 - $z = 1$,
 - $z = 1 - i$,
 - $z = 16i$,
 - $z = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
 - $z = -1 - i\sqrt{3}$,
 - $z = -1$,
 - $z = -1 + i$,
 - $z = -1 - i$,
 - $z = -8 + 8i$,
 - $z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
 - $z = -8i$,
 - $z = 1 + i$,
 - $z = 2 - 2i$,
 - $z = \sqrt{3} + i$,
 - $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

9. Wyznaczyć pierwiastki zespolone stopnia $n = 4$ z liczby zespolonej z , dla

- a) $z = 16$ b) $z = -16$ c) $z = 8\mathbf{i}$ d) $z = -9\mathbf{i}$
e) $z = 16 + 16\mathbf{i}$ f) $z = 9 - 9\mathbf{i}$ g) $z = -4 + 4\mathbf{i}$ h) $z = -4 - 4\mathbf{i}$
-

- Twierdzenie Eulera: $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi$, skąd wynika przedstawienie

$$z = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) = re^{\mathbf{i}\varphi}, \quad r = |z|$$

10. Wyznaczyć w postaci algebraicznej liczby zespolone:

- (1) $e^{\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}$, (2) $e^{\pi\mathbf{i}}$, (3) $e^{\frac{3\pi}{2}\mathbf{i}}$, (4) $e^{2\pi\mathbf{i}}$, (5) $e^{-2\pi\mathbf{i}}$, (6) $e^{\frac{3\pi}{4}\mathbf{i}}$, (7) $e^{-\frac{3\pi}{4}\mathbf{i}}$,
(8) $e^{-\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}$, (9) $e^{\frac{5\pi}{2}\mathbf{i}}$, (10) $e^{\frac{7\pi}{4}\mathbf{i}}$, (11) $e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}}$, (12) $e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbf{i}}$, (13) $e^{\frac{5\pi}{3}\mathbf{i}}$, (14) $e^{-\frac{7\pi}{3}\mathbf{i}}$,
(15) $e^{\frac{22\pi}{3}\mathbf{i}}$, (16) $e^{\frac{31\pi}{2}\mathbf{i}}$, (17) $e^{\frac{27\pi}{4}\mathbf{i}}$, (18) $e^{\frac{40\pi}{6}\mathbf{i}}$, (19) $e^{\frac{55\pi}{3}\mathbf{i}}$, (20) $e^{\frac{-38\pi}{4}\mathbf{i}}$, (21) $e^{\frac{-45\pi}{4}\mathbf{i}}$.