MATEMATYKA. I rok Chemii. LISTA ZADAŃ 03-GRANICE CIĄGÓW

1 Obliczanie granic.

- Własności:
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ – granica istnieje i definiuje liczbę e,
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $a\in\mathbb{R}$,
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ dla dowolnej liczby dodatniej $a\in\mathbb{R}$,
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla dowolnej liczby $a\in(-1,1)$.

1. Obliczyć granice

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n+3)}{(n-1)(n+2)}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}}{3\sqrt{n^2-n}}$, 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+2n}-n\sqrt{3})$,

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$, 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{2}-\sqrt{2n^2+5})$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n-1}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+(-3)^n}{7+2^{2n}}$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}+1}$, 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-5)^{n+1}+2^{2n}}{(-5)^{n-1}+7}$,

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{11}$ 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$, 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+\frac{1}{2^n}}$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$, 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n$, 21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+1}$,

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^2+2}$, 23) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^3+70}$, 24) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2+\frac{2}{n}}$,

---

- Własność: jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a ciąg $(b_n)_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$

2. Wykazać, że poniższe granice są równe 0:

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{2n}$, 26) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cos n\pi}{2^n}$, 27) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$

---

2 Ciągi rekurencyjne.

3. Obliczyć granicę ciągu określonego rekurencją: $a_1=1,\ a_2=0$ oraz $a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$.

4. Pokazać, że ciąg określony rekurencją: $a_1=3$ oraz $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę $c=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Wywnioskować stąd, że ten ciąg jest zbieżny, i obliczyć jego granicę.

Uwaga: w celu pokazania monotoniczności można korzystać ze schematu indukcyjnego, pokazując ogólną implikację: ($a_n \leqslant a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$) i sprawdzając, że $a_1 \leqslant a_2$.

5. Pokazać, że ciąg określony rekurencją: $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{(a_n)^2}{2}$ jest malejący i ograniczony z dołu (np. przez 0). Wywnioskować stąd, że jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

6. Pokazać, że ciąg określony rekurencją: $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$ jest malejący i ograniczony z dołu (np. przez 0). Wywnioskować stąd, że jest zbieżny i obliczyć jego granicę.