

• **Definicja:** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli ciąg sum częściowych $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$ jest zbieżny; wówczas sumą szeregu jest liczba $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. Korzystając z definicji obliczyć sumy szeregów:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ({}^{2n+1}\sqrt{a} - {}^{2n-1}\sqrt{a}) \quad a > 0$$

• Jeśli ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ nie zbiega do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Wykazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

• Kryterium porównawcze: jeśli $0 \leq a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

3. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n},$$

4. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^4}.$$

5. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

• Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny *absolutnie=bezwzględnie* jeżeli szereg wartości bezwzględnych $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

6. Zbadać zbieżność oraz zbieżność absolutną szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

7. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{25^n}, & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{7^n 3^{n+1}}, & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2}{7n^2+n} \right)^{2n}, & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(n-3)!}{(2n)!}, \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n^2+1}, & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+2}{3n+1}, & 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}, & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}, & 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}, & 11) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}, & 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \\ 13) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}, & 14) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n^2}, & 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}, & 16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3+2}, \\ 17) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}, & 18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}, & 19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}, & 20) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{2}-1), \\ 21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & 22) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}, & 23) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+4}{4n+1} \right)^n, & 24) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}, \\ 25) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{5^n (n+1)!}, & 26) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), & 27) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2n}{\pi^n+3}, & 28) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2^n}{5^{n+2}+n^2}, \\ 29) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n+1}{2^n+n}, & 30) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+2n}{(n+1)!}, & 31) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{n^3+2n}, & 32) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arcsin \frac{n}{n+1})^n+1}{3^n+n^2}, \\ 33) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}+n^{n^2}}{4^{n+1} \cdot n^{n^2}}, & 34) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin \frac{n}{2^n}+2}{n+2^n}, & 35) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3^n}{(n^2+1)+4^n}, & 36) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)+3^{n-1}}{5^{n+1}+n^2} \end{array}$$

Wskazówka: w zadaniach można wykorzystać własności:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} &\leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}, & \ln(n+1) &\leq n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan n &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$