

- Podstawowa metoda obliczania granic: jeśli f jest funkcją **ciągłą** w punkcie $a \in D_f$ (**należącym do dziedziny tej funkcji!**) to $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 - Jeśli $a \notin D_f$ to powyższej metody **nie można zastosować!**
 - Uwaga: funkcje określone wzorami są zazwyczaj ciągłe na swojej maksymalnej dziedzinie, czyli tam gdzie wzór jest dobrze określony. Funkcje elementarne są ciągłe na całej swojej maksymalnej dziedzinie.
-

1. Obliczyć granice:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x^3 + 4x^5}{3x^2 + 7x^4 - x^6}, & (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + 2x^2}, & (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & (4) \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}, \\
 (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{\sin^2 x}, & (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x + \operatorname{tg} x}, & (7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}, & (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1}{x}, \\
 (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, & (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, & (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3 \operatorname{tg}(7x)}, & (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx}{cx}, \\
 (13) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 2x - 5}{2x^3 + 4x^2 - x + 1}, & (14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}, & (15) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}, & (16) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, \\
 (17) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}, & (18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{x^2}, & (19) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}, & (20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 2}{2x^2 + 1}.
 \end{array}$$

2. Obliczyć granice jednostronne:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}, & (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}, & (4) \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + x - 6}{|x^2 - 9|}, \\
 (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}, & (6) \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}, & (7) \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sin x}, & (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - x), \\
 (9) \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + x - 6}{|x^2 - 9|}, & (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}, & (11) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - x^2}, & (12) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{3 - x}, \\
 (13) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}, & (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1 - x^3}}{\sqrt{1 - x}}, & (15) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.
 \end{array}$$

3. Obliczyć granice niewłaściwe:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{3x^3 + 2x - 5}, & (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 1}{3x^3 + 2x - 5}, & (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}), \\
 (4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{2x}, & (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}, & (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}), \\
 (7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x), & (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{2x}, & (9) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x), \\
 (10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x), & (11) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sin x}{x}.
 \end{array}$$

4. Wyznaczyć maksymalną dziedzinę dla następujących funkcji f podanej wzorem:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, & (2) \quad f(x) = \log_2(2 - x), & (3) \quad f(x) = \ln(\sin x), \\
 (4) \quad f(x) = \ln(\sin^2 x), & (5) \quad f(x) = \frac{1}{\sin x}, & (6) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 1}, \\
 (7) \quad f(x) = \ln \sqrt{1 - x}, & (8) \quad f(x) = \log(x + 3), & (9) \quad f(x) = \operatorname{tg} 2x, \\
 (10) \quad f(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}, & (11) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, & (12) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}, \\
 (13) \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}, & (14) \quad f(x) = \ln \sqrt{3 - 2x^2}, & (15) \quad f(x) = \sqrt{9 - 3x}, \\
 (16) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{\ln(1 - x)}, & (17) \quad f(x) = \ln(\operatorname{tg} x), & (18) \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.
 \end{array}$$

- Własność Darboux: Jeśli f jest funkcją *ciągłą na przedziale domkniętym* $[a, b]$ i na końcach przedziału ma wartości różnych znaków, czyli spełnia jeden z warunków: $f(a) < 0 < f(b)$ lub $f(a) > 0 > f(b)$, to istnieje liczba $c \in (a, b)$ dla której $f(c) = 0$.
- 5. Uzasadnić, że podany wielomian $P(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty i znaleźć jego przybliżenie z dokładnością $d = 0, 1$, dla: (1) $P(x) = x^3 + x^2 - 1$, (2) $P(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 1$, (3) $P(x) = x^3 - x^2 - 1$, (4) $P(x) = x^3 - x - 5$.
- 6. Korzystając z własności Darboux wyznaczyć pierwszą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$.
- 7. (a) Wykazać, że równanie $x^2 + \frac{1}{x} = 1$ ma rozwiązanie ujemne i wyznaczyć jego przybliżoną wartość z dokładnością $d = 0, 1$.
(b) * Pokazać, że to równanie nie ma rozwiązań dodatnich.
- 8. Wykazać, że równanie $x^2 = 1 + \sqrt{x}$ ma rozwiązanie i wyznaczyć jego przybliżoną wartość z dokładnością $d = 0, 1$.