

LISTA ZADAŃ 06 – WŁASNOŚCI FUNKCJI (POCHODNE I BADANIE FUNKCJI).

- Dla $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ jest $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ (pochodna iloczynu).

Dla $f(x) = g(h(x))$ jest $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ (pochodna funkcji złożonej).

1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $f(x) = \frac{13}{5}x^{\frac{5}{2}},$ | (2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4,$ | (3) $f(x) = -\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3} - 2\sqrt{x^3},$ |
| (4) $f(x) = \frac{5x^2 + x - 2}{x^2 + 7},$ | (5) $f(x) = \sqrt[5]{x^2},$ | (6) $f(x) = \frac{2}{x^3\sqrt{x}},$ |
| (7) $f(x) = \frac{3x^2}{7x^5 - x + 2},$ | (8) $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1},$ | (9) $f(x) = \frac{4}{x^3},$ |
| (10) $f(x) = 3^{-x},$ | (11) $f(x) = \frac{x}{\sin x},$ | (12) $f(x) = x \sin x + \cos x,$ |
| (13) $f(x) = x^2 e^x,$ | (14) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$ | (15) $f(x) = \arccos x^2,$ |
| (16) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 3),$ | (17) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},$ | (18) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$ |
| (19) $f(x) = \ln(1 - x^2),$ | (20) $f(x) = x \arcsin x,$ | (21) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x},$ |
| (22) $f(x) = e^x \sin x,$ | (23) $f(x) = x \operatorname{arctg} x,$ | (24) $f(x) = x \sin 3x,$ |
| (25) $f(x) = e^x \cos^2 x,$ | (26) $f(x) = x e^{-x},$ | (27) $f(x) = (x^3 + 2x)e^{-x},$ |
| (28) $f(x) = (1 + \cos x)e^x,$ | (29) $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x},$ | (30) $f(x) = x^2 \ln x.$ |

- Dla $f(x) = g(x)^{h(x)}$ mamy wzór: $f'(x) = f(x) \cdot [h(x) \cdot \ln g(x)]'$ lub, równoważnie: $f'(x) = f(x) [\ln f(x)]'$ (pochodna logarytmiczna).

2. Obliczyć pochodne następujących funkcji złożonych:

- | | | |
|----------------------------|--|--|
| (1) $f(x) = \ln^2 \sin x,$ | (2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2 - x^3)^4}},$ | (3) $f(x) = \arcsin(1 - x),$ |
| (4) $f(x) = \sin(e^x),$ | (5) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}},$ | (6) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1},$ |
| (7) $f(x) = x^{\sin x},$ | (8) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},$ | (9) $f(x) = \sqrt{\sin x + \sqrt{x + 2\sqrt{x}}},$ |
| (10) $f(x) = e^{\cos x},$ | (11) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12},$ | (12) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}},$ |
| (13) $f(x) = x^{5x},$ | (14) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$ | (15) $f(x) = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x,$ |
| (16) $f(x) = 2^{3x},$ | (17) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x},$ | (18) $f(x) = (4x^2 - 5x + 13)^{\frac{5}{3}},$ |
| (19) $f(x) = x^{e^x},$ | (20) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}.$ | |

- Funkcja (różniczkowalna) $f(x)$ ma *maksimum lokalne* w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a) = 0$ oraz (koniecznie) spełnia (przynajmniej) **jeden** z następujących dwóch warunków:

- $f'(s) > 0 > f'(t)$ dla dowolnych liczb $s < a < t$, bliskich a ,
- $f''(a) < 0$ (o ile druga pochodna istnieje w a).

- Jeśli dla każdej liczby $s \in (a, b)$ jest $f''(s) > 0$, to funkcja f jest *wypukła* na przedziale (a, b) .

3. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji (czyli: wyznaczyć dziedzinę, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i wartości w tych ekstremach).

- | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|--|
| (1) $f(x) = x^3 - 3x,$ | (2) $f(x) = 2x^3 + 4x^2,$ | (3) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},$ | (4) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$ |
| (5) $f(x) = x e^x,$ | (6) $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$ | (7) $f(x) = \ln(1 - x^2),$ | (8) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$ |
| (9) $f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x},$ | (10) $f(x) = x e^{-x},$ | (11) $f(x) = \ln(x^2 - 1),$ | (12) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$ |