

MATEMATYKA. I rok Chemii
LISTA ZADAŃ 09 – CAŁKI OZNACZONE.

- Aby obliczyć całkę oznaczoną $\int_a^b f(x)dx$ wystarczy znaleźć całkę nieoznaczoną (a w zasadzie jakąś jedną pierwotną) $F(x) = \int f(x)dx$ i podstawić do niej wartości graniczne; wówczas $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

1. Znajdując całki nieoznaczone danych funkcji podcałkowych f obliczyć następujące całki oznaczone:

$$(1) \int_a^b dx, \quad (2) \int_0^1 e^x dx, \quad (3) \int_1^5 (x-1)^3 dx, \quad (4) \int_1^3 2x^3 dx, \quad (5) \int_1^e x \ln x dx, \\ (6) \int_a^b x dx, \quad (7) \int_1^4 \frac{1}{x} dx, \quad (8) \int_0^\pi \sin x dx \quad (9) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (10) \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx$$

- Jeśli funkcja podcałkowa jest postaci $\frac{g'(x)}{g(x)}$ to całkę oznaczoną obliczamy ze wzoru:

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(b)| - \ln |g(a)| = \ln \left| \frac{g(b)}{g(a)} \right|.$$

2. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć całki:

$$(1) \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx, \quad (2) \int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+2} dx, \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx, \quad (4) \int_0^2 \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx, \quad (5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \cos x} dx.$$

Uwaga: w przykładzie (5) przyjąć $g(x) = \operatorname{tg} x$.

- Wzór na całkowanie przez części dla całki oznaczonej: $\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx$.

3. Całkując przez części obliczyć następujące całki oznaczone:

$$(1) \int_1^4 \ln x dx, \quad (2) \int_0^2 x^2 e^x dx, \quad (3) \int_1^3 x^2 \ln x dx, \quad (4) \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx, \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

- Wzór na całkowanie przez podstawienie dla całki oznaczonej: jeśli funkcja F jest jakąś pierwotną funkcji f , a funkcja podcałkowa jest postaci $f(g(x))g'(x)$, to $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = F(g(b)) - F(g(a))$.

4. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie obliczyć całki oznaczone:

$$(1) \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx, \quad (2) \int_0^2 x e^{x^2} dx, \quad (3) \int_0^3 x^2 (2x^3 + 4)^2 dx, \quad (4) \int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx, \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx.$$

- Jeśli funkcja f jest ciągła i określona na przedziale $[A, B]$, to funkcja określona dla $a, x \in [A, B]$ przez całkę oznaczoną $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ jest pierwotną funkcji f ; czyli $F'(x) = f(x)$.

- Jeśli funkcja F jest określona jako całka oznaczona postaci $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ dla pewnej funkcji g , to jej pochodna wyraża się wzorem: $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

5. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$(1) F(x) = \int_1^x t(1+t^2)^5 dt, \quad (2) F(x) = \int_0^{x^2} t^{-3} dt, \quad (3) F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt \\ (4) F(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2) dt, \quad (5) F(x) = \int_0^{\sqrt{1+x^2}} t^2 dt, \quad (6) F(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{1+t} dt.$$

- Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $(a, b]$ i nieograniczona $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, to całkę niewłaściwą z tej

funkcji określamy jako granicę $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$, o ile ta granica istnieje.

6. Obliczyć następujące całki oznaczone niewłaściwe (funkcji nieograniczonych)

$$(1) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}, \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 2x}, \quad (3) \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}, \quad (4) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad (5) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (6) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x+x^2},$$

- Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale nieskończonym $[a, +\infty)$, to całkę niewłaściwą z tej funkcji określamy jako granicę $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f(x) dx$ o ile ta granica istnieje.

7. Obliczyć następujące całki oznaczone niewłaściwe (w przedziale nieskończonym)

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \quad (2) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad (3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}, \quad (4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}, \quad (5) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^6},$$

- Jeśli funkcja f jest nieujemna $f \geq 0$ i ciągła na przedziale $D = [a, b]$, to objętość V_X bryły obrotowej powstałej przez obrót jej wykresu wokół osi OX jest dana wzorem: $V_X = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

8. Znaleźć objętość piramidy (stożka o podstawie kwadratowej) o wysokości 4 i boku podstawy 3.

9. Wyznaczyć objętości brył obrotowych, powstałych w wyniku obrotu wokół osi OX wykresów następujących funkcji f o dziedzinach D :

$$\begin{array}{lll} (1) f(x) = x^{\frac{2}{3}}, & D = [0, 1], & (2) f(x) = \sqrt{3-x}, \quad D = [0, \sqrt{3}], \\ (3) f(x) = \cos x, & D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], & (4) f(x) = x \sqrt[4]{1+x^3}, \quad D = [1, 2], \\ (5) f(x) = x(3-x), & D = [0, 3], & (6) f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}, \quad D = [0, 1] \\ (7) f(x) = \cos x, & D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right], & (8) f(x) = \sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}, \quad D = [0, 1], \\ (9) f(x) = \sin x, & D = [0, \pi], & (10) f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad D = [1, 2], \\ (11) f(x) = 1+x^2, & D = [-1, 2], & (12) f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad D = [-1, 1] \end{array}$$

- Jeśli funkcja f jest nieujemna $f \geq 0$ i ciągła na przedziale $D = [a, b]$ dla $0 \leq a < b$, to objętość V_Y bryły obrotowej powstałej przez obrót jej wykresu wokół osi OY jest dana wzorem:

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

10. Wyznaczyć objętości brył obrotowych powstałych w wyniku obrotu wokół osi OY wykresów następujących funkcji f o dziedzinach D :

$$\begin{array}{lll} (1) f(x) = \frac{4}{x^3}, \quad D = [1, 3], & (2) f(x) = (x-1)^2, \quad D = [0, 2], & (3) f(x) = 2x - \frac{3}{x}, \quad D = [2, 3], \\ (4) f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad D = [0, \sqrt{3}], & (5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], & (6) f(x) = \sin x, \quad D = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \end{array}$$

- Długość L krzywej będącej wykresem funkcji f na przedziale $[a, b]$ jest dana wzorem: $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$.

11. Wyznaczyć długość krzywej będącej wykresem funkcji f w podanym przedziale:

$$\begin{array}{lll} (1) f(x) = 2x+3, \quad 1 \leq x \leq 5, & (2) f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad 1 \leq x \leq 4, & (3) f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 4, \\ (4) f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 3, & (5) f(x) = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, & (6) f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}, \quad 1 \leq x \leq 3 \end{array}$$