

MATEMATYKA. I rok Chemii.
LISTA ZADAŃ 11 – RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

- Metoda **rozdzielonych zmiennych**: równanie różniczkowe postaci $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$ sprowadza się do postaci $\psi(y)dy = \varphi(x)dx$ i rozwiązuje obliczając całki $\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx$.

1. Metodą rozdzielonych zmiennych rozwiązać równania różniczkowe:

(a) $xy' + y^2 = 1$, (b) $xy' = y$, (c) $y' \sin x = y \cos x$, (d) $y' = e^{2x-y}$, (e) $ydx = (x^2 - 1)dy$.

- Zastosowanie podstawienia $y = xu$, gdzie $u = u(x)$ jest funkcją zmiennej x , daje: $y' = u + xu'$, przez co otrzymujemy nowe równanie różniczkowe dla funkcji $u = u(x)$

2. Stosując tego typu podstawienie przekształcić poniższe równania różniczkowe i rozwiązać je:

(a) $xy' = x + y$, (b) $(x + y)y' + y = 0$, (c) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, (d) $y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

- **Równanie różniczkowe liniowe**: $y' = A(x)y + B(x)$. Dla $B(x) = 0$ jest to równanie **jednorodne**, które rozwiązuje się według schematu:

(a) **Obliczamy pierwotną**: $a(x) := \int A(x) dx$

(b) **Otrzymujemy rozwiązania postaci**: $y_C(x) := Ce^{a(x)}$ dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$

3. Rozwiązać równania liniowe jednorodne:

(a) $xy' = y$, (b*) $xy' + x^2y = 0$, (c) $y' = y \sin x$, (d) $y' + \frac{y}{x} = 0$, (e) $y' + 2xy = 0$.

- Równanie liniowe niejednorodne postaci $y'(x) = A(x)y(x) + B(x)$ rozwiązujemy według następującego schematu:

(a) **Obliczamy pierwotną**: $a(x) := \int A(x) dx$

(b) **Obliczamy całkę**: $c(x) := \int B(x)e^{-a(x)} dx$

(c) **Otrzymujemy rozwiązania postaci**: $y_C(x) := [c(x) + C]e^{a(x)}$ dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$

4. Metodą uzmienniania stałej rozwiązać następujące równania liniowe niejednorodne.

(a) $xy' = x + y$, (b) $xy' + 2y = x^2$, (c) $y' + y = 2x$, (d) $y' + y = x^3$, (e) $y' - ay = e^{ax}$.