MATEMATYKA. I rok Chemii.
LISTA ZADAŃ 12 – FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH.

- Dla ustalonej liczby $c \in \mathbb{R}$ poziomicą funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ nazywamy zbiór takich punktów $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ które spełniają równanie $f(x,y) = c$.

1. Wyznaczyć dziedziny oraz dowolne 3 (niepuste) poziomice następujących funkcji:

$$\begin{array}{rlllrlllrlll}
1) & f(x,y) & = & \sqrt{16-x^2-y^2} & 2) & f(x,y) & = & x^2+y^2+2 & 3) & f(x,y) & = & \dfrac{1}{x^2+y^2} \\
4) & f(x,y) & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 5) & f(x,y) & = & xy & 6) & f(x,y) & = & \sin xy \\
7) & f(x,y) & = & \sqrt{1+x^2+y^2} & 8) & f(x,y) & = & x & 9) & f(x,y) & = & y \\
10) & f(x,y) & = & x+y & 11) & f(x,y) & = & x-y & 12) & f(x,y) & = & \dfrac{x+y}{x-y} \\
13) & f(x,y) & = & \dfrac{x}{y} & 14) & f(x,y) & = & x^2 & 15) & f(x,y) & = & \cos x \\
16) & f(x,y) & = & \sin\sqrt{x^2+y^2} & 17) & f(x,y) & = & x^2-y^2 & 18) & f(x,y) & = & \dfrac{1}{xy}
\end{array}$$

2. Naszkicować wykresy funkcji:

1)$f(x,y) = x+2y$ 2) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 3) $f(x,y) = x-y+1$ 4)$f(x,y) = \sqrt{x+4y^2}$.

3. Obliczyć następujące granice funkcji:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (x-y+2)$ 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} (2x^2-3xy+y^2)$ 3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-xy+1}{x^2+y^2}$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ 5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+4xy+4y^2}{1+y}$ 6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{y}$

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. Uzasadnić, że nie istnieją następujące granice:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}$ 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$.

- Pochodne cząstkowe rzędu dwa są określone w następujący sposób:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1 oraz rzędu 2 podanych funkcji:

$$\begin{array}{rlllrlllrlll}
1) & f(x,y) & = & \sqrt{xy} & 2) & f(x,y) & = & \cos xy & 3) & f(x,y) & = & \ln xy \\
4) & f(x,y) & = & \ln(x^2+y^2) & 5) & f(x,y) & = & \sqrt{1+x^2+y^2} & 6) & f(x,y) & = & \sqrt{16-x^2-y^2} \\
7) & f(x,y) & = & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 8) & f(x,y) & = & \sin\sqrt{x^2+y^2} & 9) & f(x,y) & = & x^2y^3
\end{array}$$

Sprawdzić czy jest prawdziwa równość pochodnych mieszanych: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$
:

6. Wyznaczyć punkty stacjonarne, czyli takie $(a, b) \in D_f$ dla których $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, oraz pozostałe punkty krytyczne, czyli takie, dla których jedna z tych pochodnych cząstkowych nie istnieje, jeśli:

   (1) $f(x, y) = \sin xy$ (2) $f(x, y) = \cos x + \cos y$ (3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (4) $f(x, y) = e^{xy}$
   (5) $f(x, y) = \cos xy$ (6) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ (7) $f(x, y) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ (8) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

- Hesjan funkcji dwóch zmiennych, gdy pochodne mieszane rzędu dwa są równe, jest określony wzorem

$$\mathbf{H}(f)(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right]^2.$$

Jeśli (a, b) jest punktem krytycznym funkcji f to mamy następujące możliwości:

Max. Jeśli $\mathbf{H}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, to f ma *lokalne maksimum* w (a, b).

Min. Jeśli $\mathbf{H}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, to f ma *lokalne minimum* w (a, b).

Siodło. Jeśli $\mathbf{H}(f)(a, b) < 0$ to (a, b) jest *punktem siodłowym* funkcji f.

7. Wyznaczyć ekstema lokalne oraz punkty siodłowe następujących funkcji:

   (1) $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$ (2) $f(x, y) = \cos xy$ (3) $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2$
   (4) $f(x, y) = \ln xy$ (5) $f(x, y) = \sin xy$ (6) $f(x, y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$
   (7) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (8) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

Janusz Wysoczański