MATEMATYKA. I rok Chemii. LISTA ZADAŃ 13 – MACIERZE I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

(1) Wykonać następujące mnożenia macierzy 2×2:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & -1\end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, (6) $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$,

(9) $\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, (10) $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, (11) $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$. (12) $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$,

(2) Które przykłady z poprzedniego zadania pokazują, że mnożenie macierzy nie jest przemienne?

(3) Dla macierzy $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}$ wyznaczyć ich transpozycje A^T, B^T, oraz obliczyć iloczyny: AB, BA, A^2, B^2, A^TB, BA^T, AB^T, B^TA, A^TB^T, B^TA^T.

(4) Pokazać, że macierze $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ spełniają warunki: $PQ = 0 = QP$, $P^2 = P = P^T$, $Q^2 = Q = Q^T$.

(5) Rozwiązać układy równań liniowych:

(1) $\begin{aligned} x + 2y &= 1\\ -2x + y &= 1\end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} 2x - y &= -2\\ x + y &= 0\end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} x + y &= 3\\ 2x - 3y &= -2\end{aligned}$ (4) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 0\\ -3x + y &= 1\end{aligned}$ (5) $\begin{aligned} x - 3y &= 12\\ 3x - y &= -12.\end{aligned}$

---

(6) Dla macierzy 3×3

$$C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 3\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

wyznaczyć C^T, D^T i obliczyć iloczyny: CD, DC, C^TD, DC^T, CD^T, D^TC, C^TD^T, D^TC^T.

(7) Obliczyć wyznaczniki $\det C$, $\det D$ dla macierzy C i D z poprzedniego zadania.

(8) Rozwiązać układy równań liniowych: $CX = Y$, oraz $DX = Y$, gdzie C i D są macierzami z poprzedniego zadania, natomiast X, Y są wektorami w $\mathbb{R}^3$: $X = (x, y, z)$ jest "zmienną", $Y = (1, -2, -1)$.

(9) Rozwiązać następujące układy dwóch równań liniowych z trzema niewiadomymi:

(1) $\begin{aligned} x + y + z &= 1\\ x - y - z &= -1\end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} x + y - 2z &= 1\\ -x + 2y + z &= 2\end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} 2x - y - z &= 3\\ x + 3y + z &= -1\end{aligned}$ (4) $\begin{aligned} x - y - z &= 2\\ -x + y - 2z &= 1\end{aligned}$

(10) Pokazać, że macierze $P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, spełniają warunki:

$$(P_k)^2 = P_k = (P_k)^T, \qquad P_jP_k = 0, \qquad P_1 + P_2 + P_3 = I$$

dla $j \neq k$, gdzie $j, k = 1, 2, 3$, a I jest macierzą jednostkową. Jakie są wartości własne tych macierzy?

(11) Rozwiązać układy równań liniowych:

(1) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 1\\ -2x + y + 3z &= 1\\ x - 3y + 4z &= 2\end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} 2x - y - 2z &= -2\\ x + y + z &= -3\\ 3x - y - 2z &= -1\end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} x + y - z &= 3\\ 2x - 3y + z &= -2\\ y - z &= -1\end{aligned}$ (4) $\begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 0\\ -3x + y - z &= 1\\ x + 2z &= 1\end{aligned}$

(12) Dla macierzy $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ i dowolnej liczby naturalnej m uzasadnić, że $B^m = \begin{pmatrix}1 & 1 & c_m\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Wyznaczyć liczby c_m.