Lista 1: Powtórzenie wiadomości o liczbach zespolonych

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Postać algebraiczna liczby zespolonej: $z = a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.
•Część rzeczywista: $\mathrm{Re}(a + bi) = a$, część urojona $\mathrm{Im}(a + bi) = b$.
•Liczba zespolona czysto rzeczywista: $z = a + 0i$; liczba czysto urojona: $z = 0 + bi$.
•Postać trygonometryczna dla $z = a + bi$: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r = |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, natomiast $\varphi \in \mathbb{R}$ jest argumentem liczby z.
•Argument główny: $\mathrm{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi]$ dla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
•Każda niezerowa liczba zespolona jest odwracalna: ze wzoru $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ otrzymujemy $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ (stosujemy zapis: $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$).

1. Zapisać poniższe liczby w postaci $a + b\,i$ dla $a, b \in \mathbb{R}$:
   a) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ b) $\left(1 + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-1}$ c) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{12}$ d) $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{-200}$ e) $\frac{2i}{(3-i)(2+i)}$ f) $\frac{1}{1-i}$.

2. Sprawdzić (i zapamiętać!) następujące własności:
   a) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
   b) $|z|^2 = z\overline{z}$, $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$,
   c) $|z\,w| = |z|\,|w|$, $|z + w| \le |z| + |w|$ $||z| - |w|| \le |z + w|$,
   d) $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = \mathrm{Arg}(\frac{1}{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$, jeśli $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$,
   e) $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) + 2n\pi$, gdzie $n \in \{-1, 0, 1\}$.

3. Opisać i narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory dane równaniami lub nierównościami:
   a) $|z + 2i| = 5$, b) $2 < |\pi + i - z| < 7$, c) $|iz + 1 - i| < 3 \wedge |z - 2| < 1$,
   d) $\dfrac{|z + i|}{|z - i|} < 1$, e) $|z + 1| + |z - i| < 2$, f) $\mathrm{Im}(\frac{\bar{z}}{z}) > 1$,
   g) $\mathrm{Arg}(\frac{1}{z}) = \frac{3}{4}\pi$ h) $0 \le \mathrm{Arg}[(1 + i)z] \le \frac{\pi}{2}$,

   Wskazówka: skorzystać z faktu, że $d(z, w) = |z - w|$ jest odległością euklidesową na płaszczyźnie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

   •Pierwiastek zespolony: symbol $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : \ w^n = z\}$ oznacza zbiór;
   wzory: dla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jest $w^n = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w = w_k := \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \quad \text{gdzie} \quad \psi_k := \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Wyznaczyć zbiory:
   a) $\sqrt[2]{i}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[4]{i}$ d) $\sqrt[2]{-i}$ e) $\sqrt[3]{-i}$.

5. Elementy poniższych zbiorów pierwiastków przedstawić w postaci algebraicznej i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej:
   a) $\sqrt{-2i}$, b) $\sqrt{5 - 2i}$, c) $\sqrt[3]{-1 - i}$, d) $\sqrt[4]{8i - 8\sqrt{3}}$, e) $\sqrt[4]{16}$.

6. Rozwiązać równania:

a) $\dfrac{z+2}{1-i} = \dfrac{3-\bar{z}}{2+i}$, b) $|z| + (z-\bar{z}) = 7-i$, c) $iz-(3+i)z+2-i=0$,
d) $z^2-2iz-2=0$ e) $(z+i)^3+(z-i)^3=0$ f) $z^4-(18+4i)z^2+77-36i=0$,
g) $z^2=\bar{z}^2$ h) $z+\frac{1}{z}=1$ i) $z^2-2z+2=0$.

7. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z, dla których
   (a) wyrażenie $\frac{1+z}{1-z}$ jest liczbą czysto rzeczywistą lub liczbą czysto urojoną,
   (b) $\frac{3+z}{i-z}$ jest liczbą czysto rzeczywistą.
   (c) $\frac{z+i}{7-z}$ jest liczbą czysto urojoną.

8. Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Wykazać, że jeśli $z+z^{-1} = 2\cos\varphi$, to dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość $z^n+z^{-n} = 2\cos(n\varphi)$.

9. Pokazać, że jeśli liczby $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mają moduł 1 i $z_1z_2 \neq -1$, to liczba $w = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ jest rzeczywista.

10. Udowodnić równość $|z+iw|^2+|w+iz|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$ dla $z,w\in\mathbb{C}$. Wywnioskować stąd, że $|z+iw|^2 \leq 2(|z|^2+|w|^2)$ dla $z,w\in\mathbb{C}$.

11. Wielomian z^4+1 rozłożyć na iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych.

    Wskazówka: wyznaczyć zbiory $\sqrt{i}$ oraz $\sqrt{-i}$ i skorzystać ze wzorów $a^2-b^2=\ldots$