Lista 2: Funkcje zmiennej zespolonej

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

1. Wypisać część rzeczywistą i część urojoną funkcji $h(z) = \frac{3}{z+i}$.

•**Funkcja wykładnicza** (zespolona): $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

2. Wyznaczyć część rzeczywistą $\mathrm{Re}(e^z)$ oraz część urojoną $\mathrm{Im}(e^z)$.

3. Pokazać wzór $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ (*wskazówka: wykonać mnożenie Cauchy'ego szeregów potęgowych*). Wywnioskować stąd, że $e^z \cdot e^{-z} = 1$ dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$, a zatem $e^z \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}$.

4. Pokazać, że jeśli $z = x + iy$ to $e^z = e^x \cdot e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$. Wywnioskować stąd, że $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

5. Korzystając z rozwinięć w szeregi potęgowe funkcji $\sin y$ i $\cos y$ uzasadnić, że $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

6. Pokazać, że $e^z = e^w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = w + 2ki\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

7. Sprawdzić, czy dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ są prawdziwe nastepujące własności:
   a) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, b) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, c) $|e^{z^2}| \leqslant e^{|z^2|}$, d) $\mathrm{Re}(e^z) = \mathrm{Re}(e^{\bar{z}})$,

---

•Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiujemy **logarytm zespolony** jako zbiór $\log z := \{w \in \mathbb{C} : \ e^w = z\}$

•Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcję α-logarytm zespolony $\log_\alpha z := w$ jeśli $\alpha < \mathrm{Im}(w) \leqslant \alpha + 2\pi$.

•Dla $\alpha = -\pi$ definiujemy funkcję **logarytm główny** $\mathrm{Log}\,(z) = w$ jeśli $\mathrm{Im}(w) \in (-\pi, \pi]$.

•Wzór: $\mathrm{Log}\,(z) = \ln |z| + i \cdot \mathrm{Arg}(z)$.

8. Pokazać, że jeśli $w_1, w_2 \in \log z$ to $w_1 - w_2 = 2k\pi i$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

9. Wyznaczyć zbiory

   a) $\log(1)$ b) $\log(-1)$ c) $\log(i)$ d) $\log(1 + i)$

10. Pokazać równość $\mathrm{Log}\,(\bar{z}) = \overline{\mathrm{Log}\,(z)}$.

11. Wyznaczyć: $\log(-2i)$, $\mathrm{Log}\,(-1 - i)$, $\log_\pi(2 - 2\sqrt{3}i)$, $\log_\pi(\frac{1}{i})$.

12. Pokazać, że
    a) $\mathrm{Log}\,(1 + i)^2 = 2\mathrm{Log}\,(1 + i)$, ale $\mathrm{Log}\,(-1 - i)^2 \neq 2\mathrm{Log}\,(-1 - i)$,
    b) $\log_{\frac{\pi}{4}} i^2 = 2 \log_{\frac{\pi}{4}} i$, ale $\log_{\frac{3\pi}{4}} i^2 \neq 2 \log_{\frac{3\pi}{4}} i$.

13. Wykorzystać wyniki z poprzedniego zadania do zbadania, dla jakich z zachodzi $\mathrm{Log}\,(z^2) = 2\mathrm{Log}\,(z)$.

14. Pokazać, że dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi własność

$$\operatorname{Log} zw = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + 2n\pi i, \qquad \text{gdzie } n \in \{-1, 0, 1\}.$$

15. Rozwiązać równania i nierówności:
    a) $\operatorname{Re}(e^z) = 0$, b) $|e^{(2+i)z}| < 1$, c) $\sin z = 2i$
    d) $\operatorname{Log} z = 1 + \frac{\pi}{4} i$ e) $\operatorname{Log}(z) = 1 + -2\pi i$, f) $\operatorname{Log}(z - \bar{z}) = i\frac{\pi}{3}$.

16. Wyznaczyć obraz zbioru P przez funkcję f, gdy
    (a) $P = \{z = x + iy_0 \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}\}$, $f(z) = e^z$;
    (b) $P = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon x \in [-\pi, 0],\ y \in [0, 1]\}$, $f(z) = e^{iz}$.
    (c) $P = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 2, \operatorname{Re}(z) > 0\}$, $f(z) = \operatorname{Log}(z)$.

•**Funkcje trygonometryczne** (zespolone): $\cos z := \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z := \dfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

17. Wyznaczyć część rzeczywistą $\operatorname{Re}(\sin z)$ oraz część urojoną $\operatorname{Im}(\sin z)$ funkcji zespolonej $\sin z$.

18. Wyznaczyć część rzeczywistą $\operatorname{Re}(\cos z)$ oraz część urojoną $\operatorname{Im}(\cos z)$ funkcji zespolonej $\cos z$..

19. Dla zespolonych funkcji sinus i cosinus pokazać, że:

$$\text{(a)}\quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \text{(b)}\quad |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + i \sinh^2 y.$$

•Sinus hiperboliczny: $\sinh x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

•Cosinus hiperboliczny: $\cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

20. Pokazać, że jeśli $z = x + iy$ to

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \sin iy &= i \sinh y \\ \cos iy &= i \cosh y \end{aligned}$$

•Definiujemy funkcję tangens wzorem $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ dla $z \in D = \{w \in \mathbb{C} : \cos w \neq 0\}$.

21. Wyznaczyć dziedzinę D funkcji tangens.

22. Obliczyć $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + 4i)$.

23. Wykazać, że $\operatorname{tg} z \neq -i$.