Lista 2a: Funkcje zmiennej zespolonej: potęgowanie, homografie.

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Potęgowanie $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1. Pokazać, że funkcja zespolona $z \mapsto z^2$ przekształca obszar $\text{Arg}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wzajemnie jednoznacznie na obszar $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Wyznaczyć obrazy punktów $z = i$, $z = 1 + i$ oraz $z = 1 - i$.

2. Wyznaczyć jakie argumenty mogą mieć wartości fonkcji zespolonej $z \mapsto z^2$, rozpatrywanej na dziedzinie $D := \{z \in \mathbb{C} : \ \text{Arg}(z) \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$. Pokazać dla których liczb $z \in D$ wartości funkcji są takie same.

3. $\star$ Pokazać, że dla dowolnej liczby $\psi \in (0, \pi)$ funkcja zespolona $z \mapsto z^2$ przekształca obszar $\{z \in \mathbb{C} : \ \text{Arg}(z) \in (\psi - \pi, \psi]\}$ w całą płaszczyznę zespoloną $\mathbb{C}$.

4. Pokazać, że funkcja zespolona $z \mapsto z^3$ przekształaca obszar $\text{Arg}(z) \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ wzajemnie jednoznacznie na obszar $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Wyznaczyć obrazy punktów $z = \sqrt{3} + i$, $z = 1 + i\sqrt{3}$ oraz $z = 1 - i\sqrt{3}$.

•Potęga zespolona: dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ definiujemy zbiór $z^\alpha := \{e^{\alpha w} \in \mathbb{C} : \ w \in \log z\}$

5. Pokazać, że dla $= a \in \mathbb{R}$ jest $z^a = \{|z|^a \cdot e^{ia\text{Arg}(z)} e^{2ak\pi i} : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Wyznaczyć zbiory a) 2^i, b) i^i, c) $(1 + i)^{1-i}$, d) $(-1)^i$.

•Płaszczyzna domknięta: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty_{\{\mathbb{C}\}}\}$ (symbol ∞ oznacza jednopunktowe uzwarcenie Aleksandrowa płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$).

7. $\star$ Pokazać, że odwzorowanie $\overline{\mathbb{C}} \ni z = x + iy \mapsto (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ zadane wzorami

$$X := \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad Y := \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad Z := \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}$$

przekształca płaszczyznę domkniętą $\overline{\mathbb{C}}$ w sferę (Riemanna) o równaniu $X^2 + Y^2 + Z^2 = Z$. Wyznaczyć obraz punktu $\infty_{\{\mathbb{C}\}}$. Co jest obrazem okręgu $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$?

---

8. Wykazać, że każda homografia, czyli funkcja zespolona zadana wzorem

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

jest różnowartościowa i odwracalna i h^{-1} też jest homografią.

9. Pokazać, że złożenie homografii też jest homografią. Wyznaczyć jej współczynniki. Wyznaczyć element neutralny składania homografii.

10. $\star$ Pokazać, że odwzorowanie

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad \text{dla} \quad ad - bc \neq 0$$

jest homomorfizmem grup, którego obrazem są macierze nieosobliwe.

11. $\star$ Dla $c \neq 0$ uzasadnić równość

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

i na jej podstawie pokazać, że każda homografia może być przedstawiona jako złożenie dwóch rodzajów przekształceń homograficznych: translacji $t_a(z) := z+a$ i inwersji $s(z) = z^{-1}$. Wypisać homogragfie występujące w rozkładzie.

12. Wyznaczyć homografię przekształcającą punkty $0, 1, i$ odpowiednio w punkty $0, -1, 2i$.

13. $\star$ Pokazać, że jeśli homografię $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, dla $c \neq 0$, określić dodatkowo w $z = -\frac{d}{c}$ wzorami $h(-\frac{d}{c}) = \infty_{\{\mathbb{C}\}}$ i $h(\infty_{\{\mathbb{C}\}}) = \frac{a}{c}$ to h przekształca $\overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ wzajemnie jednoznacznie. To samo dla $c = 0$ przy określeniu $h(\infty_{\{\mathbb{C}\}}) = \infty_{\{\mathbb{C}\}}$.