Lista 3: Granice, pochodna zespolona i równania Cauchy'ego-Riemanna.

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Granica w punkcie funkcji $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ (Ω otwarty) w $a \in \overline{\Omega}$ (domknięcie):

$$\lim_{z\to a} f(z) = c, \quad \text{jeśli} \quad \forall z_n \in \Omega \, (z_n \to a \Rightarrow f(z_n) \to c) .$$

•Granica w nieskończoności:

$$\lim_{z\to\infty_{\{\mathbb{C}\}}} f(z) = c, \quad \text{jeśli} \quad \forall z_n \in \Omega \left(z_n \to \infty_{\{\mathbb{C}\}} \Rightarrow f(z_n) \to c \right) .$$

•Uwaga: $z_n \to \infty_{\{\mathbb{C}\}}$ oznacza, że dla każdego $R > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geqslant N$ jest $|z_n| > R$.

1. Zbadać, czy istnieją granice i obliczyć te, które istnieją:

$$(a) \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}, \ (b) \lim_{z\to 1+i} (3z - \frac{1}{\bar{z}^2}), \ (c) \lim_{z\to\infty_{\{\mathbb{C}\}}} \frac{z^3+z}{(z-3i)(z+3)}, \ (d) \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2}, \ (e) \lim_{z\to\infty_{\{\mathbb{C}\}}} \frac{z^2}{z^2-i}.$$

2. Dla podanych funkcji $f(z)$ wyznaczyć ich maksymalną dziedzinę, część rzeczywistą i urojoną oraz zbadać ich ciągłość:

$$(a)\ f(z) = \bar{z}, \ (b)\ f(z) = z\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z), \ (c)\ f(z) = z|z| + i\bar{z}^2, \ (d)\ f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}, \ (e)\ f(z) = \frac{1}{z+i}.$$

•**Pochodna** zespolona funkcji $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ (Ω otwarty) w $a \in \Omega$ jest to granica ilorazu różnicowego:

$$f'(z) := \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

•Funkcja zespolona $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ (Ω otwarty) jest **holomorficzna** w $a \in \Omega$ jeśli ma pochodną w pewnym otoczeniu tego punktu, czyli istnieje $\varepsilon > 0$ takie że dla każdego $|z-a| < \varepsilon$ istnieje $f'(z)$.

•**Równania Cauchy'ego-Riemanna**":

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{CR}$$

•**Równania Cauchy'ego-Riemanna we współrzędnych biegunowych**:

$$f(x+iy) = U(r\cos t, r\sin t) + iV(r\cos t, r\sin t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{CRB}$$

3. Uzasadnić, że jednomian $g_4(z) := z^4$ spełnia równania (CR) oraz (CRB) w każdym punkcie $z \in \mathbb{C}$.

4. Pokazać z definicji, że dowolny wielomian $w(z)$ ma pochodną w dowolnym punkcie $a \in \mathbb{C}$.

5. Wyznaczyć punkty, w których podana funkcja $f(z)$ ma pochodną zespoloną. Ponadto sprawdzić, w jakich punktach swojej dziedziny funkcja spełani równania (CR), dla:

$$(a)\ f(z) = z^2 \mathrm{Im}(z),\ (b)\ f(z) = z \cdot \bar{z}^2,\ (c)\ f(z) = \frac{z}{|z|^2},\ (d)\ f(z) = \mathrm{Re}(z),\ (e)\ f(z) = \mathrm{Im}(z^2).$$

6. Sprawdzić, czy funkcja $f(z) = \sqrt{|\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z)|}$ spełnia równania (CR) w $z_0 = 0$ oraz czy istnieje pochodna zespolona $f'(0)$.

7. Sprawdzić, czy funkcja

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2} & \text{dla} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad z = 0 \end{cases}$$

spełnia równania (CR) w $z_0 = 0$ oraz czy istnieje pochodna zespolona $f'(0)$.

8. Niech będą dane pary funkcji rzeczywistych dwóch zmiennych:

$$\begin{array}{lll} (a) & u(x,y) := & x^3 + 3xy^2 - 3xy - 2x, \quad v(x,y) := 3y^3 + 3x^2y - 2y \\ (b) & u(x,y) := & \dfrac{x}{x^2+y^2} + x, \quad v(x,y) := -\dfrac{y}{x^2+y^2} - y. \end{array}$$

Dla każdej z tych par pokazać, że istnieje funkcja zespolona $f(z)$, dla której

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)) \quad \text{oraz} \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy)).$$

9. Dla podanej funkcji $u(x,y)$ zbadać, czy istnieje funkcja holomorficzna $f(z)$ taka, że $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$:

$$(a)\ u(x,y) := x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 1 \quad (b)\ u(x,y) = xy + 6y^2,\ f(0) = 0.$$

10. Uzasadnić, że podane funkcje są holomorficzne na swojej maksymalnej dziedzinie:

$$(a)\ f(z) = \frac{z}{2z^2 - i},\ (b)\ f(z) = \sin z,\ (c)\ f(z) = \mathrm{tg}\, z$$

11. Uzasadnić, że jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}$ i jej część rzeczywista $\mathrm{Re}(f(z))$ jest funkcją stałą, to także jej część urojona $\mathrm{Im}(f(z))$ jest funkcją stałą.