Lista 4: Funkcje harmoniczne.

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Funkcja $u(x, y)$ jest *harmoniczna* w obszarze otwartym $\Omega_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$ jeśli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu dwa i spełnia równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

•Funkcja harmoniczna v jest *sprzężona harmonicznie* do funkcji harmonicznej u jeśli funkcja zespolona $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ jest holomorficzna.

1. Pokazać, że poniższe funkcje $u(x, y)$ są harmoniczne i wyznaczyć ich funkcje sprzężone:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \quad u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2, \quad u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad u(x,y) = \cos x \cosh y.$$

2. Dana jest część rzeczywista u i część urojona v funkcji zespolonej f. Przedstawić f jako funkcję z:

   (a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2$ i $v(x, y) = -y^3 + 3x^2 y + 2xy$,

   (b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 3x$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + 3y$.

3. Wyznaczyć (o ile istnieje) funkcję holomorficzną f, której częścią rzeczywistą jest

   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$, (b) $u(x, y) = x^2 + 2x + 1$,

   (c) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - y$, (d) $u(x, y) = e^{-y} \cos x$.

   Zapisać f jako funkcję zmiennej z.