Lista 5: Krzywe i całki zespolone.

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Krzywa zadana parametrycznie: $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ ciągła.
•Krzywa regularna: $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ klasy C^1 bez samoprzecięć.
•Krzywe $\varphi_i : [a_i, b_i] \mapsto \mathbb{C}$ $(i = 1,2)$ równoważne: istnieje $h : [a_1, b_1] \mapsto [a_2, b_2]$ ciągła rosnąca i $\varphi_2(t) := \varphi_1(h(t))$
•Krzywa zespolona $\Gamma \subset \mathbb{C}$: klasa równoważności krzywych parametrycznych o tym samym śladzie.

1. Napisać równania parametryczne opisujące następujące krzywe:
   (a) odcinek łączący punkty $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -1$,
   (b) elipsa o środku z_0 i półosiach 2 i 3,
   (c) część paraboli $y = x^2$ zawartej między punktami $z_1 = -1$ i $z_2 = 3 + 4i$.
   (d) odcinek łączący punkty $z_1 = 3 - i$ i $z_2 = -1 + 2i$,
   (e) półokrąg o środku $z_0 = i$ i promieniu 2, od punktu $-i$ do punktu $3i$,
   (f) hiperboli $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 10]$,
   (g) zorientowany ujemnie okrąg o środku $z_0 = 7$ i promieniu π.
2. Połączyć punkty $-2i$ i $2i$ łamaną zawartą w zbiorze $1 < |z| < 3$.
3. Napisać równania parametryczne opisujące następujące krzywe:
   (a) odcinek łączący punkty $z_1 = 3 - i$ i $z_2 = -1 + 2i$,
   (b) półokrąg o środku $z_0 = i$ i promieniu 2,
   (c) hiperboli $y = \frac{1}{x}$,
   (d) zorientowany dodatnio okrąg o środku $z_0 = 3$ i promieniu 1,
   (e) zorientowaną ujemnie elipsę o środku 0 i promieniach a i b.
4. Niech $P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 4\}$. Podać przykłady krzywych zawartych w P spełniających następujące własności:
   (a) krzywa jest łamaną i łączy punkty $-2i$ i $3i$;
   (b) krzywa jest regularna zamknięta i przechodzi przez $z = 2$;
5. Podać przykład dwóch (różnych) krzywych regularnych γ_1 i γ_2 takich, że:
   (a) γ_1 i γ_2 są równoważne oraz śl(γ_1) jest półokręgiem $O(0,2) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$;
   (b) suma $\gamma_1 \cup \gamma_2$ jest okręgiem o środku 0 i promieniu 2;
   (c) $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_j(0) = 0$, $\gamma_j(1) = 1 + i$ dla $j = 1,2$.
6. (*) Naszkicować krzywą $\gamma(t) = t(\cos t + i \sin t)$, określoną dla $t \geqslant 0$.

•Obliczanie całki zespolonej krzywoliniowej: $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(x))\gamma'(x)\mathrm{d}x$, gdzie γ jest parametryzacją krzywej $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

7. Obliczyć całki:

   (a) $\int_\Gamma (z-\bar{z})\mathrm{d}z$, gdzie $\Gamma = \{z = x+iy \in \mathbb{C}: \ x \geqslant 0, \ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1\}$.

   (b) $\int_\Gamma \bar{z}\mathrm{d}z$, gdzie $\Gamma = \{z = x+iy \in \mathbb{C}: \ |x|+|y| = 1\}$.

   (c) $\int_\Gamma \bar{z}\mathrm{Re}(z^2)\mathrm{d}z$, gdzie Γ jest ćwiartką okręgu $|z| = 2$ o poczatku $2i$ i końcu 2,

   (d) $\int_\Gamma (z+\frac{1}{z-1})\mathrm{d}z$, gdzie Γ jest odcinkiem $[0,i]$,

   (e) $\int_\Gamma e^{\bar{z}}\mathrm{d}z$, gdzie Γ jest łamaną łączącą kolejno punkty 0, $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}i$,

   (f) $\int_\Gamma \frac{z}{\bar{z}}\mathrm{d}z$, gdzie Γ jest brzegiem górnej połowy pierścienia $1 < |z| < 3$.

8. Obliczyć całkę $\int_\Gamma \mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$, gdy

   (a) $\Gamma = [0, 3+i]$;

   (b) $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = r\}$;

   (c) $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-1| = 1, \ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$.

9. Obliczyć całkę $\int_\gamma \bar{z}\mathrm{Re}(z^2)\, dz$, gdy

   (a) $\Gamma = [-i, i]$;

   (b) Γ jest lewym półokręgiem łączącym $-i$ z i;

   (c) $\Gamma = [-i, 1] \cup [1, i]$ jest łamaną łączącą punkty $-i$, 1 i i.

10. Uzasadnić, że

$$\int_\Gamma (z-z_0)^{-k}\mathrm{d}z = 0, \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N},$$

   gdy Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w z_0 i promieniu r.

11. Obliczyć podane całki po dowolnej krzywej regularnej Γ o zadanym poczatku z_0 i końcu w_0:

   (a) $\int_\Gamma e^{z+\pi i}\, dz$, $z_0 = 0$, $w_0 = \pi i$;

   (b) $\int_\Gamma z\cos(z^2+i)\, dz$, $z_0 = -i$, $w_0 = 1+i$;

   (c) $\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$, $w_0 = \frac{\pi}{2}i$.