Lista 6: Wzór Cauchy'ego.

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Twierdzenie Cauchy'ego: $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$, jeśli f holomorficzna na obszarze jednospójnym Ω, $\Gamma \subset \Omega$ krzywa regularna zamknięta.

•Wzór Cauchy'ego: $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$, jeśli spełnione są założenia twierdzenia Cauchy'ego i $z_0 \in \mathrm{Int}(\Gamma)$

•Wzór Cauchy'ego dla pochodnych: $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, jeśli spełnione są założenia twierdzenia Cauchy'ego i $z_0 \in \mathrm{Int}(\Gamma)$

UWAGA! O ile nie zaznaczono inaczej wszystkie krzywe zamknięte są zorientowane dodatnio.

---

1. Wykazać, że funkcja $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ nie ma funkcji pierwotnej w obszarze $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

2. Nie korzystając z twierdzeń Cauchy'ego, obliczyć podane całki po dowolnej krzywej regularnej Γ o zadanym poczatku z_0 i końcu w_0:

   (a) $\int_\Gamma e^{z+\pi i}\, dz$, $z_0 = 0$, $w_0 = \pi i$;

   (b) $\int_\Gamma z\cos(z^2+i)\, dz$, $z_0 = -i$, $w_0 = 1+i$;

   (c) $\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$, $w_0 = \frac{\pi}{2}i$.

   Wskazówka: Znaleźć funkcje pierwotne.

3. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego lub ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnych, obliczyć całkę $\int_\Gamma \frac{z^2}{(z+1)^3}\, dz$ po zorientowanym dodatnio okręgu $\Gamma = C(-1,1)$.

4. Obliczyć całkę
$$\int_T \frac{\cos z}{z^3 - z^5}\mathrm{d}z,$$
   gdy T jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $-3, 3i, 3-i$, zorientowanym ujemnie.

5. Obliczyć całkę
$$\int_\Gamma \frac{e^z(z-4)}{z(z+i)^2}dz,$$
   po dodatnio zorientowanym okręgu $\gamma = \{z : |z+2i| = \frac{3}{2}\}$.

6. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnych obliczyć
$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^m(z-b)^k}\mathrm{d}z$$
   przy założeniu, że $|a| < R < |b|$, $m, k \in \mathbb{N}$.

7. Obliczyć następującą całkę, dla $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2 e^z}{(z+1)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

8. Obliczyć całkę

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\operatorname{tg} z}{(z-\frac{\pi}{4})(z+i\frac{\pi}{4})} \mathrm{d}z,$$

gdy Γ jest zorientowanym dodatnio okręgiem:
(a) o środku w $\frac{\pi}{4}$ i promieniu $\frac{1}{2}$,
(b) o środku w $-i$ i promieniu 1.

Jak z tych danych wyliczyć całkę $I(\gamma)$, gdy γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1, zorientowanym ujemnie?

9. Jakie są możliwe wartości wyrażenia

$$\int_\Gamma \frac{z^2 \cos z + \cos z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$

jeżeli Γ jest krzywą regularną zamkniętą i taką, że $\{z \in \mathbb{C}\colon z^4 + z^2 = 0\} \cap \Gamma = \emptyset$?

10. W zależności od parametru $a > 0$ obliczyć całkę

$$\int_\Gamma \frac{z^2 \cos z}{z^4 - 1} \mathrm{d}z,$$

gdy Γ jest zorientowanym dodatnio okręgiem o środku w punkcie a i promieniu $2a$, niezawierającym zer mianownika.

11. Załóżmy, że f jest holomorficzna w obszarze Ω oraz koło domkniete ograniczone okręgiem $K(a, r)$ o środku w punkcie a i promieniu r zawiera się w Ω. Pokazać, że

$$2 \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^3} \mathrm{d}z = \int_K \frac{f''(z)}{z-a} \mathrm{d}z.$$

12. Niech f będzie funkcją holomorficzną na $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2020\}$ i parzystą na Ω, tzn. $f(z) = f(-z)$ dla $z \in \Omega$. Wykazać, że dla każdej krzywej regularnej zamkniętej $\Gamma \subset \Omega$, i każdego $z_0 \in \Omega$ takiego, że z_0 i $-z_0$ leżą we wnętrzu krzywej γ zachodzi

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2 - z_0^2} d(z) = 0.$$

Uwaga! Osobno rozważyć specjalny przypadek $z_0 = 0$.

13. Pokazać, że dla funkcji f holomorficznej w obszarze jednospójnym Ω, zawierającym koło domknięte $K_r := \{|z| \leqslant r\} \subset \Omega$, zachodzą własności:

$$\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) \mathrm{d}t = 2\pi f(0) \qquad \text{oraz} \qquad |f^{(n)}(0)| < \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f\left(re^{it}\right)| \mathrm{d}t, n \in \mathbb{N}.$$