Lista 7: Szeregi potęgowe.

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Szereg potęgowy to funkcja zespolona postaci

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad D_f := \{w \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_0)^n \text{ zbieżny}\}.$$

•Promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ma wzór:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

•Różniczkowanie szeregu potęgowego: dla $|z-z_0| < R$

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n.$$

---

1. Zbadać zbieżność szeregów zespolonych, czyli wyznaczyć D_f, dla:
   a) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n} z^n$, b) $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{2in} z^n$, c) $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(1+i)^{n-1}} z^n$.

2. Wyznaczyć promień zbieżności szeregów:
   a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [1+(-i)^n]^n z^n$, b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^{2n}$, c) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^{n^2}$,
   d) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(3+i)n} (z-i)^n$, e) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$.
   W przykładzie e) zakładamy, że $a > 0$.

•Koło zbieżności szeregu potęgowego $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$: $K(z_0, R) = \{|z-z_0| < R\}$.

---

3. Znaleźć promienie zbieżności szeregów potęgowych i zbadać ich zachowanie na brzegu koła zbieżności:
   a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n (z+2i)^n}{(4-3i)^n}$, b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4i)^n}{(1-4i)^n}$, c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n^2(1-i)^n}$,
   d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (z+1)^n}{3n+1}$, e) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{8^n (n+i)}$, f) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i}{n^5} z^{n^2}$,
   g) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1+i)^{n!}$.

4. Wykazać, że pochodna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ o promieniu zbieżności R też ma promień zbieżności R. Podać przykład, że zachowanie na okręgu zbieżności może się zmienić.

5. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ będą szeregami o promieniu zbieżności odpowiednio R_a i R_b. Wykazać, że promień zbieżności R szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ spełnia warunek $R \geqslant R_a R_b$. Podać przykład, że może być $R = R_a R_b$. Podać przykład, że może być $R > R_a R_b$.

6. Wykazać, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, także jest zbieżny.

7. Podać przykład lub stwierdzić, że nie istnieje:

   (a) szereg potęgowy o środku $z_0 = i$ zbieżny w $3i$ i rozbieżny w 0;

   (b) szereg potęgowy o środku $z_0 = -i$ zbieżny w $2i$ i rozbieżny w 5;

   (c) szereg potęgowy o środku $z_0 = -2 - 2i$ zbieżny w kole o promieniu 3;

   (d) szereg potęgowy o środku $z_0 = 1 - 2i$ zbieżny w kole o promieniu 0;

   (e) szereg potęgowy o środku $z_0 = 1 + i$ zbieżny w kole o promieniu ∞;

   (f) szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ zbieżny na okręgu o promieniu 4 i rozbieżny w punkcie $z = 2 - i$.