
Lista 8: Szeregi Laurenta.
FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•**Szereg Laurenta** to funkcja zespolona postaci $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, dziedziną $D_f := \{w \in \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(w - z_0)^n \text{ zbieżny}\} \subset (\mathbb{C} \setminus K(z_0, r)) \cap \overline{K(z_0, R)}$

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad r := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

- Oznaczenie $P(z_0, r, R) = \{r < |z - z_0| < R\}$; $D_f \subset \overline{P(z_0, r, R)}$
 - Część **regularna** szeregu Laurenta: $\varphi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $D_u \subset K(z_0, R)$.
 - Część **osobliwa** szeregu Laurenta: $\psi(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$, $D_v \subset \{|z - z_0| \geq r\} = \mathbb{C} \setminus K(z_0, r)$.
-

1. Znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji

- a) $f(z) = \frac{3}{(z-1)(z+i)}$ wokół $z_0 = i$, b) $f(z) = (z-i)e^{\frac{4}{z+1}}$ wokół $z_0 = -1$,
c) $f(z) = \frac{z^2}{(z-3i)^2}$ wokół $z_0 = 3i$, d) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ wokół $z_0 = 0$,
e) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z}$ wokół $z_0 = 0$, f) $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ wokół $z_0 = 0$,
g)* $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-1}$ wokół $z_0 = 0$,

W każdym przypadku wypisać wzór na współczynniki szeregu i wyznaczyć pierścienie zbieżności.

2. Funkcję $f(z) = \frac{3}{z^2 - 2z - 8}$ rozwinąć w szereg Laurenta na pierścieniach

- a) $P(0; 0, 2)$, b) $P(0; 2, 4)$, c) $P(4; 0, 2)$.

3. Funkcję $f(z) = ze^{\frac{1}{z+2}}$ rozwinąć w szereg Laurenta na pierścieniu $P(-2; 0, \infty)$. Korzystając z tego rozwinięcia określić charakter osobliwości w $z_0 = -2$.

4. Znaleźć pierścień zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, gdy $a_n = \frac{1}{(4i)^n}$ dla $n \geq 0$ i $a_n = i^{n+1}$ dla $n < 0$.

5. Znaleźć błąd w następującym rozumowaniu: Mamy

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n,$$

wiec rozwinięcie w szereg Laurenta nie jest jednoznaczne.

6. Podać przykład szeregu Laurenta, który ma pusty pierścień zbieżności.