Lista 9: Residua

FUNKCJE ANALITYCZNE 2020

•Residuum funkcji f w punkcie a:

$$\mathrm{Res}[f;a] := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\mathrm{d}z$$

•Twierdzenie o residuach: jeśli f jest analityczna w obszarze Ω poza skończoną ilością punktów osobliwych $a_1,\dots a_n \notin \Gamma$, gdzie $\Gamma \subset \Omega$ krzywa regularna zamknięta zorientowana dodatnio, to

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f;a_k].$$

•Obliczanie całek rzeczywistych $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ metodami zespolonymi: jeśli $a_1,\dots a_n \in \mathbb{C}^+$ są punktami osobliwymi $f(z)$ i dla dużych $R > 0$ jest oszacowanie $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R^\alpha}$ $(\alpha > 1)$, to całkując po krzywej $\Gamma = C_R + [-R,R]$, gdzie $C_R\{|z| = R : \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ - górny półokrąg zorientowany dodatnio, wnioskujemy (dla $R \to +\infty$), że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f;a_k].$$

---

1. Dla funkcji danej wzorem
$$f(z) := \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$$
   (a) wyznaczyć residua w każdym punkcie osobliwym tej funkcji,

   (b) obliczyć całkę po krzywej zamkniętej Γ, zorientowanej dodatnio, wyznaczonej jako suma następujących półokręgów:
$$\begin{aligned} C_1 &:= \{|z-2i| = 1, \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\},\\ C_2 &:= \{|z+2i| = 1, \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\},\\ C_3 &:= \{|z| = 1, \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\},\\ C_3 &:= \{|z| = 3, \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}\\ \Gamma &:= C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \end{aligned}$$

2. Obliczyć całkę zespoloną
$$\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z(z-2)^4}\mathrm{d}z,$$
   znajdując odpowiednie residuum poprzez rozwinięcie tej funkcji w szereg Laurenta wokół $w = 2$. **wskazówka**: *skorzystać z rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji*
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)}.$$

3. Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całki zespolone:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^2(e^z-i)}\mathrm{d}z$, b) $\displaystyle\int_{|z|=\pi} \frac{\sin z}{z(e^{2z}+1)}\mathrm{d}z$, c) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{z-1}{z\sin z}\mathrm{d}z$,

d) $\displaystyle\int_{|z|=e} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{z^{-2}}\mathrm{d}z$, f) $\displaystyle\int_{|z|=2} \sin z^{-1}\mathrm{d}z$,

g) $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{z^{-2}}\mathrm{d}z$, h) $\displaystyle\int_{|z|=2} \sin z^{-1}\mathrm{d}z$, i) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^{-1}\sin z^{-1}\mathrm{d}z$.

4. Metodami zespolonymi obliczyć całki rzeczywiste

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+10x^2+9}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$,