Algebra R – Lista 1

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane).

1. Sporządzić tabelkę działania $\cup$ na $\mathcal{P}(\{0,1\})$.

2. Niech $*$ będzie działaniem binarnym na pewnym zbiorze.

   (a) Udowodnić, że jeśli $*$ ma lewostronny element neutralny e_L oraz prawostronny element neutralny e_R, to $e_L = e_R$. Wywnioskować, że każde działanie binarne ma co najwyżej jeden element neutralny.

   (b) Załóżmy, że $*$ jest łączne i posiada element neutralny. Udowodnić, że jeśli element a ma lewostronny element odwrotny a_L oraz prawostronny element odwrotny a_R, to $a_R = a_L$. Wywnioskować, że każdy element ma co najwyżej jeden element odwrotny.

3. Rozważmy strukturę algebraiczną $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$. Wiadomo, że działania $\cup$ i $\cap$ są łączne i przemienne.

   (a) Wskazać elementy neutralne dla działań $\cup$ oraz $\cap$.

   (b) Wyznaczyć wszystkie elementy, które posiadają element odwrotny względem $\cup$ oraz wszystkie elementy, które posiadają element odwrotny względem $\cap$.

4. Podać przykład (tabelkę) działania $*$ na zbiorze $\{0,1\}$, takiego że

   $$0 * (0 * 0) \neq (0 * 0) * 0.$$

   Ile jest takich działań?

5. Zbadać własności działań $\wedge$ i $\vee$ na $\mathbb{N}$ oraz na $\mathbb{R}$.

6. Udowodnić, że odejmowanie na $\mathbb{Z}$ nie ma elementu neutralnego i że nie jest łączne.

7. Rozważamy strukturę algebraiczną $(\mathcal{F}, \circ)$, której uniwersum $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich funkcji ze zbioru $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, a działanie $\circ$ jest składaniem funkcji. Znaleźć wszystkie lewostronne elementy neutralne oraz wszystkie prawostronne elementy neutralne w tej strukturze. Czy struktura ta ma element neutralny?

8. Niech $f\colon X \to X$. Udowodnić, że:

   (a) Funkcja f jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g\colon X \to X$, taka że $f \circ g = \mathrm{id}_X$.

   (b) Funkcja f jest "1-1" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g\colon X \to X$, taka że $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

9. Dla jakich zbiorów X, struktura $(X^X, \circ)$ jest grupą?

10. Które z poniższych struktur algebraicznych są grupami?

    (a) Zbiór liczb całkowitych z mnożeniem.

    (b) Zbiór liczb postaci $\frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, z mnożeniem.

    (c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$, gdzie $a \odot b := \sqrt{2}ab$.

11. Udowodnić, że mnożenie modulo n na $\mathbb{Z}_n$, oznaczane przez $\cdot_n$, jest łączne.

12. Niech $*$ będzie łącznym działaniem na zbiorze A posiadającym element neutralny. Niech A^* będzie podzbiorem A złożonym z elementów odwracalnych. Dowieść, że $*|_{A^* \times A^*}$ (tzn. $*$ obcięte do $A^* \times A^*$) jest działaniem na A^*. Następnie pokazać, że A^* wraz z tym obciętym działaniem jest grupą. Wywnioskować, że $\mathbb{Z}_n^*$ jest grupą z działaniem mnożenia modulo n. Opisać, z jakich elementów składa się $\mathbb{Z}_n^*$.

13. Niech G będzie dowolną grupą i niech $a, b \in G$.

    (a) Udowodnić, że każde z równań $ax = b$ oraz $ya = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

    (b) Udowodnić, że w G zachodzą prawa skreśleń.

14. Pokazać, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.