Algebra IR - Lista 11

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1.

1. Niech $r_1, \ldots, r_n \in R$. Udowodnić, że
$$(r_1, \ldots, r_n) = r_1 R + \ldots + r_n R,$$
gdzie $(r_1, \ldots, r_n)$ jest z definicji przekrojem wszystkich ideałów pierścienia R zawierających $\{r_1, \ldots, r_n\}$, czyli najmniejszym ideałem zawierającym $\{r_1, \ldots, r_n\}$.

2. Niech $I \trianglelefteqslant R$ oraz
$$\sqrt{I} := \{a \in R : (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}.$$
Udowodnić, że $\sqrt{I} \trianglelefteqslant R$.

3. Niech $f \colon R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni, $I \trianglelefteqslant R, J \trianglelefteqslant S$.
   - Udowodnić, że $f^{-1}[J] \trianglelefteqslant R$.
   - Udowodnić, że jeśli f jest epimorfizmem, to $f[I] \trianglelefteqslant S$.
   - Podać przykład f, I, takich że $f[I] \ntrianglelefteq S$.

4. Znaleźć $f \in \mathbb{Q}[X]$, taki że $(f) = (X^2 - 1, X^3 + 1)$.

5. Udowodnić, że ideał $(2, X) \trianglelefteqslant \mathbb{Z}[X]$ nie jest główny.

6. Niech $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i $d^2 \in \mathbb{Z}$. Rozważmy funkcję
$$v : \mathbb{Q}(d) \to \mathbb{Q}, \quad v(n + md) := n^2 - m^2 d^2,$$
gdzie $m, n \in \mathbb{Q}$. Udowodnić, że:
   (a) dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(d)$ mamy $v(\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta)$,
   (b) dla każdego $\alpha \in \mathbb{Z}[d]$ mamy: $\alpha \in \mathbb{Z}[d]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) \in \{-1, 1\}$.

7. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jest euklidesowy.

8. Opisać grupę $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^*$.

9. Udowodnić, że grupa $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ jest nieskończona.