Algebra R - Lista 2

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Przypomnijmy, że $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ oraz $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$.

1. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że dla dowolnego $g \in G$ oraz $m, n \in \mathbb{Z}$ zachodzą wzory $g^{m+n} = g^m g^n$ i $(g^m)^n = g^{mn}$.

2. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $m \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że funkcja
$$f \colon A \to A, \quad f(a) := ma$$
jest homomorfizmem.

3. Znaleźć izomorfizm pomiędzy D_3 i S_3.

4. Udowodnić, że $S^1 \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

5. Udowodnić, że:
   (a) złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem,
   (b) złożenie izomorfizmów jest izomorfizmem,
   (c) funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem,
   (d) jeśli $G \cong H$ i $H \cong N$, to $G \cong N$.

6. Pokazać, że grupa $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.

7. Niech G będzie grupą i $g \in G$. Przypomnijmy, że $\text{rząd}(g) := |\langle g \rangle|$, przy czym $\aleph_0$ jest utożsamione z ∞. Udowodnić, że $\text{rząd}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_{>0} : g^n = e\}$ (przyjmujemy, że $\min(\emptyset) = \infty$).

8. Niech G będzie grupą, g jej elementem, a n liczbą całkowitą różną od 0.
   (a) Udowodnić, że $\text{rząd}(g) = \text{rząd}(g^{-1})$.
   (b) Udowodnić, że $g^n = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd elementu g jest dzielnikiem n.

9. Udowodnić, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

10. Niech G i H będą grupami.
    (a) Udowodnić, że jeśli $f \colon G \to H$ jest homomorfizmem grup i $g \in G$ jest elementem skończonego rzędu, to rząd elementu $f(g)$ dzieli rząd elementu g. Pokazać, że jeśli f jest monomorfizmem, to rzędy te są równe.
    (b) Udowodnić, że jeśli G jest grupą cykliczną generowaną przez element g, a h jest elementem H o tej własności, że $\text{rząd}(h) | \text{rząd}(g)$, o ile $\text{rząd}(g) < \infty$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f \colon G \to H$, taki że $f(g) = h$.

11. Czy istnieje homomorfizm grup $f \colon G \to H$, gdzie:
    (a) $G = (\mathbb{Z}, +), H = (\mathbb{Q}, +), f(1) = 7$,
    (b) $G = (\mathbb{Z}, +), H = (\mathbb{Z}, +), f(2) = 7$ (wsk: czemu musiałoby być wtedy równe $f(1)$?),
    (c) $G = (\mathbb{R}, +), H = (\mathbb{R}^*, \cdot), f(1) = 5$.
    (d) $G = (\mathbb{R}, +), H = (\mathbb{R}^*, \cdot), f(1) = -1$,
    (e) $G = (\mathbb{Q}, +), H = (\mathbb{Q}^*, \cdot), f(1) = 2$,
    (f) $G = (\mathbb{Q}, +), H = (\mathbb{Q}^*, \cdot), f(2) = 1$,
    (g) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4), H = (\mathbb{Z}_5, +_5), f(1) = 1$,
    (h) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4), H = (\mathbb{Z}, +), f(1) = 1$,
    (i) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4), H = (\mathbb{Z}_2, +_2), f(1) = 1$.

12. Znaleźć wszystkie homomorfizmy $f \colon G \to H$, gdzie:
    (a) $G = (\mathbb{Z}, +), H = (\mathbb{Q}, +)$,
    (b) $G = (\mathbb{Z}_{15}, +_{15}), H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$,

(c) $G = (\mathbb{Z}_6, +_6), H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$,

(d) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$.

13. Niech G będzie grupą skończoną i niech $H \subseteq G$. Udowodnić, że $H \leqslant G$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $h_1, h_2 \in H$ zachodzi $h_1 h_2 \in H$.

14. Czy podzbiór H grupy G jest podgrupą G, gdzie:

    (a) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +), H = \{(2x, 5x, 3x) : x \in \mathbb{Z}\}$,

    (b) $G = (\mathbb{Z}_8^*, \cdot_8), H = \{1, 3\}$,

    (c) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4), H = \{0, 3\}$,

    (d) $G = (\mathbb{Z}_6, +_6), H = \{0, 3\}$,

    (e) G jest grupą izometrii kwadratu, a H składa się ze wszystkich czterech obrotów,

    (f) G jest grupą izometrii kwadratu, a H składa się ze wszystkich czterech odbić oraz identyczności.

15. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.

    (a) Pokazać, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.

    (b) Pokazać, że jeślli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \subseteq H_2$ lub $H_2 \subseteq H_1$.