

Algebra IR - Lista 8

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane).

1. Udowodnić, że $Q'_8 = \{I, -I\}$.
2. Udowodnić, że (nie można korzystać z tego, że dla $n \geq 5$ grupa A_n jest prosta!):
 - (a) dla $n \geq 1$ mamy $(S_n)' = A_n$,
 - (b) dla $n \geq 5$ mamy $(A_n)' = A_n$.

Wskazówka: Dla $n \geq 3$ grupa A_n jest generowana przez zbiór wszystkich cykli długości 3.

3. Udowodnić, że jeśli $|G| = pq^2$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, to G jest rozwiązalna.
4. Udowodnić, że jeśli $|G| = 200$, to G jest rozwiązalna.
5. Udowodnić, że jeśli $|G| < 60$, to G jest rozwiązalna.
6. Niech $A \trianglelefteq B \leq G$ oraz $H \trianglelefteq G$. Dowiesć, że
 - (a) $BH/AH \cong B/A(H \cap B)$,
 - (b) $BH/H \cong B/H \cap B$.
7. Z zadania 6 wywnioskować lemat Zassenhausa o motyłu (patrz notatki z wykładu).
8. Ile elementów rzędu 7 zawiera grupa prosta rzędu 168?
9. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie ma ciągu:
 - (a) normalnego o faktorach cyklicznych,
 - (b) kompozycyjnego.
10. Znaleźć ciąg kompozycyjny grupy \mathbb{Z}_n .