

## Algebra IR - Lista 8

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane).

1. Udowodnić, że  $Q'_8 = \{I, -I\}$ .
2. Udowodnić, że (nie można korzystać z tego, że dla  $n \geq 5$  grupa  $A_n$  jest prosta!):
  - (a) dla  $n \geq 1$  mamy  $(S_n)' = A_n$ ,
  - (b) dla  $n \geq 5$  mamy  $(A_n)' = A_n$ .

Wskazówka: Dla  $n \geq 3$  grupa  $A_n$  jest generowana przez zbiór wszystkich cykli długości 3.
3. Udowodnić, że jeśli  $|G| = pq^2$ , gdzie  $p$  i  $q$  są liczbami pierwszymi, to  $G$  jest rozwiązalna.
4. Udowodnić, że jeśli  $|G| = 200$ , to  $G$  jest rozwiązalna.
5. Udowodnić, że jeśli  $|G| < 60$ , to  $G$  jest rozwiązalna.
6. Niech  $A \trianglelefteq B \leq G$  oraz  $H \trianglelefteq G$ . Dowieść, że
  - (a)  $BH/AH \cong B/A(H \cap B)$ ,
  - (b)  $BH/H \cong B/(H \cap B)$ .
7. Z zadania 6 wywnioskować lemat Zassenhausa o motyłu (patrz notatki z wykładu).
8. Ile elementów rzędu 7 zawiera grupa prosta rzędu 168?
9. Udowodnić, że  $(\mathbb{Q}, +)$  nie ma ciągu:
  - (a) normalnego o faktorach cyklicznych,
  - (b) kompozycyjnego.
10. Znaleźć ciąg kompozycyjny grupy  $\mathbb{Z}_n$ .