Algebra IR - Lista 9

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech $X = \{x_i : i \in I\}$ będzie dowolnym zbiorem. Przez $\mathbb{L}_X$ oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem X, a przez N_X – zbiór słów nieskracalnych. Przypomnijmy, że grupa $\mathbb{F}_X$ była zdefiniowana jako zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ na $\mathbb{L}_X$ z działaniem konkatenacji na reprezentantach. Grupa wolna o wolnym zb. gen. X była zdefiniowana jako dowolna grupa $G \supseteq X$, dla której istnieje izomorfizm $\varphi\colon G \to \mathbb{F}_X$, taki że $\varphi(x) = [x]$ dla każdego $x \in X$. Utożsamiając x z $[x]$, $\mathbb{F}_X$ staje się grupą wolną o wolnym zb. gen. X. Dla wygody czasami dowolną grupę wolną o wolnym zb. gen. X też oznacza się przez $\mathbb{F}_X$ (chociaż jest ona zdefiniowana z dokładnością do izomorfizmu nad X); z kontekstu powinno być jasne, czy $\mathbb{F}_X$ oznacza dowolną grupę wolną, czy jej konkretną realizację za pomocą pierwotnej definicji $\mathbb{F}_X$ jako zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$.

1. Niech ρ będzie funkcją ze zbioru $\mathbb{L}_X$ w zbiór N_X, polegającą na kolejnym usuwaniu znajdującego się najbardziej na prawo podsłowa postaci $x_i^\epsilon x_i^{-\epsilon}$, gdzie $i \in I$ i $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Udowodnić następujące własności funkcji ρ, gdzie $u, v \in \mathbb{L}_X$, $i \in I$ oraz $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

   (a) $\rho(u) \sim u$.

   (b) $\rho(u) = u \iff u$ jest nieskracalne.

   (c) $\rho(uv) = \rho(u\rho(v))$.

   (d) $\rho(x_i^\epsilon x_i^{-\epsilon} u) = \rho(u)$.

   (e) $\rho(u x_i^\epsilon x_i^{-\epsilon} v) = \rho(uv)$.

   (f) $\rho(uv) = \rho(\rho(u)\rho(v))$. *Wsk.* Indukcja względem $|u|$.

   Przypomnienie. Własności (b) i (e) były użyte na wykładzie do pokazania, że w każdej klasie równoważności $[u]$ słowa u istnieje dokładnie jedno słowo nieskracalne (i jest nim właśnie $\rho(u)$). To pozwoliło wywnioskować, że $x \mapsto [x]$ jest zanurzeniem X w $\mathbb{F}_X$ i utożsamić X z podzbiorem $\mathbb{F}_X$.

2. Na N_X definiujemy działanie $u \cdot v := \rho(uv)$, gdzie ρ jest funkcją z zadania 1. Udowodnić, że funkcja $\bar{\rho}\colon \mathbb{F}_X \to N_X$ zadana wzorem $\bar{\rho}([u]) := \rho(u)$ jest dobrze określonym izomorfizmem struktur algebraicznych $(\mathbb{F}_X, \cdot)$ oraz $(N_X, \cdot)$. Wywnioskować, że $(N_X, \cdot)$ jest grupą (izomorficzną z $\mathbb{F}_X$).

   Uwaga. W konsekwencji $(N_X, \cdot)$ jest jawną realizacją grupy wolnej o wolnym zb. gen. X. Przewaga N_X nad $\mathbb{F}_X$ jest taka, że tu nie trzeba utożsamiać x z $[x]$, żeby dostać, że X jest podzbiorem rozważanej grupy. Przewaga $\mathbb{F}_X$ jest taka, że bardzo łatwo sprawdza się, że jest to grupa, a dla N_X łączność działania nie jest natychmiastowa (zauważmy, że w zadaniu łączność wynika z łączności działania w grupie $\mathbb{F}_X$, ale przy użyciu funkcji ρ i jej własności).

3. Dla podzbioru X grupy G udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) G jest grupą wolną o wolnym zbiorze generatorów X,

   (b) $G = \langle X \rangle$ oraz dwa słowa z $\mathbb{L}_X$ definiują ten sam element grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy są one $\sim$-równoważne,

   (c) $G = \langle X \rangle$ oraz słowo z $\mathbb{L}_X$ definiuje element neutralny w grupie G wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono $\sim$-równoważne ze słowem pustym,

   (d) X jest zbiorem wolnych generatorów G, tzn. $G = \langle X \rangle$ oraz każde nieskracalne i niepuste słowo z $\mathbb{L}_X$ definiuje różny od e element grupy G.

4. Niech X, Y będą zbiorami. Udowodnić, że:

   (a) jeśli $|X| = |Y|$, to $\mathbb{F}_X \cong \mathbb{F}_Y$,

   (b) jeśli $\mathbb{F}_X \cong \mathbb{F}_Y$, to $|X| = |Y|$.

   Wsk. W (b) wydzielić grupy $\mathbb{F}_X$ i $\mathbb{F}_Y$ przez podgrupy generowane przez kwadraty wszystkich elementów.

5. Udowodnić, że podgrupa grupy wolnej $\mathbb{F}_{x,y}$ generowana przez elementy $x^n y x^n$, $n \in \mathbb{N}$, jest przez nie generowana w sposób wolny.

6. (Uniwersalność grupy zadanej przez prezentację.) Niech $A \subseteq \mathbb{L}_X$. Niech G będzie grupą, a $f\colon X \to G$ funkcją. Załóżmy, że dla każdego słowa $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} \in A$, $f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_m})^{\epsilon_m} = e_G$. Niech $\pi_A\colon X \to \langle X|A\rangle$ oznacza obcięcie do X homomorfizmu ilorazowego $\mathbb{F}_X \to \mathbb{F}_X/\langle\langle A\rangle\rangle$. Udowodnić, że wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{f}\colon \langle X \mid A\rangle \to G$, taki że $\bar{f} \circ \pi_A = f$.

7. Udowodnić, że
$$S_3 \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = 1\rangle.$$
Wsk. Skorzystać z "przepisu" podanego na wykładzie.

8. Udowodnić, że
$$D_n \cong \langle x, y \mid x^2 = y^n = xyxy = 1\rangle.$$