

Algebra IR - Lista 9

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech $X = \{x_i : i \in I\}$ będzie dowolnym zbiorem. Przez \mathbb{L}_X oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem X , a przez N_X – zbiór słów nieskracalnych. Przypomnijmy, że grupa \mathbb{F}_X była zdefiniowana jako zbiór klas abstrakcji relacji \sim na \mathbb{L}_X z działaniem konkatencji na reprezentantach. Grupa wolna o wolnym zb. gen. X była zdefiniowana jako dowolna grupa $G \supseteq X$, dla której istnieje izomorfizm $\varphi: G \rightarrow \mathbb{F}_X$, taki że $\varphi(x) = [x]$ dla każdego $x \in X$. Utożsamiając x z $[x]$, \mathbb{F}_X staje się grupą wolną o wolnym zb. gen. X . Dla wygody czasami dowolną grupę wolną o wolnym zb. gen. X też oznacza się przez \mathbb{F}_X (choć jest ona zdefiniowana z dokładnością do izomorfizmu nad X); z kontekstu powinno być jasne, czy \mathbb{F}_X oznacza dowolną grupę wolną, czy jej konkretną realizację za pomocą pierwotnej definicji \mathbb{F}_X jako zbioru klas abstrakcji relacji \sim .

1. Niech ρ będzie funkcją ze zbioru \mathbb{L}_X w zbiór N_X , polegającą na kolejnym usuwaniu znajdującego się najbardziej na prawo pod słowa postaci $x_i^\epsilon x_i^{-\epsilon}$, gdzie $i \in I$ i $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Udowodnić następujące własności funkcji ρ , gdzie $u, v \in \mathbb{L}_X$, $i \in I$ oraz $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- (a) $\rho(u) \sim u$.
- (b) $\rho(u) = u \iff u$ jest nieskracalne.
- (c) $\rho(uv) = \rho(u\rho(v))$.
- (d) $\rho(x_i^\epsilon x_i^{-\epsilon} u) = \rho(u)$.
- (e) $\rho(u x_i^\epsilon x_i^{-\epsilon} v) = \rho(uv)$.
- (f) $\rho(uv) = \rho(\rho(u)\rho(v))$. *Wsk.* Indukcja względem $|u|$.

Przypomnienie. Własności (b) i (e) były użyte na wykładzie do pokazania, że w każdej klasie równoważności $[u]$ słowa u istnieje dokładnie jedno słowo nieskracalne (i jest nim właśnie $\rho(u)$). To pozwoliło wywnioskować, że $x \mapsto [x]$ jest zanurzeniem X w \mathbb{F}_X i utożsamiać X z podzbiorem \mathbb{F}_X .

2. Na N_X definiujemy działanie $u \cdot v := \rho(uv)$, gdzie ρ jest funkcją z zadania 1. Udowodnić, że funkcja $\bar{\rho}: \mathbb{F}_X \rightarrow N_X$ zadana wzorem $\bar{\rho}([u]) := \rho(u)$ jest dobrze określonym izomorfizmem struktur algebraicznych (\mathbb{F}_X, \cdot) oraz (N_X, \cdot) . Wywnioskować, że (N_X, \cdot) jest grupą (izomorficzną z \mathbb{F}_X).

Uwaga. W konsekwencji (N_X, \cdot) jest jawną realizacją grupy wolnej o wolnym zb. gen. X . Przewaga N_X nad \mathbb{F}_X jest taka, że tu nie trzeba utożsamiać x z $[x]$, żeby dostać, że X jest podzbiorem rozważanej grupy. Przewaga \mathbb{F}_X jest taka, że bardzo łatwo sprawdza się, że jest to grupa, a dla N_X łączność działania nie jest natychmiastowa (zauważmy, że w zadaniu łączność wynika z łączności działania w grupie \mathbb{F}_X , ale przy użyciu funkcji ρ i jej własności).

3. Dla podzbioru X grupy G udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) G jest grupą wolną o wolnym zbiorze generatorów X ,
 - (b) $G = \langle X \rangle$ oraz dwa słowa z \mathbb{L}_X definiują ten sam element grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy są one \sim -równoważne,
 - (c) $G = \langle X \rangle$ oraz słowo z \mathbb{L}_X definiuje element neutralny w grupie G wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono \sim -równoważne ze słowem pustym,
 - (d) X jest zbiorem wolnych generatorów G , tzn. $G = \langle X \rangle$ oraz każde nieskracalne i niepuste słowo z \mathbb{L}_X definiuje różny od e element grupy G .

4. Niech X, Y będą zbiorami. Udowodnić, że:

- (a) jeśli $|X| = |Y|$, to $\mathbb{F}_X \cong \mathbb{F}_Y$,
- (b) jeśli $\mathbb{F}_X \cong \mathbb{F}_Y$, to $|X| = |Y|$.

Wsk. W (b) wydzielić grupy \mathbb{F}_X i \mathbb{F}_Y przez podgrupy generowane przez kwadraty wszystkich elementów.

5. Udowodnić, że podgrupa grupy wolnej $\mathbb{F}_{x,y}$ generowana przez elementy $x^n y x^n$, $n \in \mathbb{N}$, jest przez nie generowana w sposób wolny.

6. (Uniwersalność grupy zadanej przez prezentację.) Niech $A \subseteq \mathbb{L}_X$. Niech G będzie grupą, a $f: X \rightarrow G$ funkcją. Załóżmy, że dla każdego słowa $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} \in A$, $f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_m})^{\epsilon_m} = e_G$. Udowodnić, że wtedy istnieje dokładnie jedno przedłużenie f do homomorfizmu $\tilde{f}: \langle X \mid A \rangle \rightarrow G$.

7. Udowodnić, że

$$S_3 \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = 1 \rangle.$$

Wsk. Skorzystać z “przepisu” podanego na wykładzie.

8. Udowodnić, że

$$D_n \cong \langle x, y \mid x^2 = y^n = xyxy = 1 \rangle.$$