Algebra IR - Lista 9

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadniać (nawet gdy w zadaniu nie jest to jawnie napisane). Niech $X = \{x_i : i \in I\}$ będzie dowolnym zbiorem. Przez $\mathbb{L}_X$ oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem X, a przez N_X – zbiór słów nieskracalnych. Przypomnijmy, że grupa $\mathbb{F}_X$ była zdefiniowana jako zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ na $\mathbb{L}_X$ z działaniem konkatenacji na reprezentantach. Grupa wolna o wolnym zb. gen. X była zdefiniowana jako dowolna grupa $G \supseteq X$, dla której istnieje izomorfizm $\varphi\colon G \to X$, taki że $\varphi(x) = [x]$ dla każdego $x \in X$. Utożsamiając x z $[x]$, $\mathbb{F}_X$ staje się grupą wolną o wolnym zb. gen. X. Dla wygody czasami dowolną grupę wolną o wolnym zb. gen. X też oznacza się przez $\mathbb{F}_X$ (chociaż jest ona zdefiniowana z dokladnością do izomorfizmu nad X); z kontekstu powinno być jasne, czy $\mathbb{F}_X$ oznacza dowolną grupę wolną, czy jej konkretną realizację za pomocą pierwotnej definicji $\mathbb{F}_X$ jako zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$.

1. Niech ρ będzie funkcją ze zbioru $\mathbb{L}_X$ w zbiór N_X, polegającą na kolejnym usuwaniu znajdującego się najbardziej na prawo podsłowa postaci $x_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}$, gdzie $i \in I$ i $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Udowodnić następujące własności funkcji ρ, gdzie $u, v \in \mathbb{L}_X$, $i \in I$ oraz $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

   (a) $\rho(u) \sim u$.

   (b) $\rho(u) = u \iff u$ jest nieskracalne.

   (c) $\rho(uv) = \rho(u\rho(v))$.

   (d) $\rho(x_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}u) = \rho(u)$.

   (e) $\rho(ux_i^{\epsilon}x_i^{-\epsilon}v) = \rho(uv)$.

   (f) $\rho(uv) = \rho(\rho(u)\rho(v))$. *Wsk.* Indukcja względem $|u|$.

   Przypomnienie. Własności (b) i (e) były użyte na wykładzie do pokazania, że w każdej klasie równoważności $[u]$ słowa u istnieje dokładnie jedno słowo nieskracalne (i jest nim właśnie $\rho(u)$). To pozwoliło wywnioskować, że $x \mapsto [x]$ jest zanurzeniem X w $\mathbb{F}_X$ i utożsamić X z podzbiorem $\mathbb{F}_X$.

2. Na N_X definiujemy działanie $u \cdot v := \rho(uv)$, gdzie ρ jest funkcją z zadania 1. Udowodnić, że funkcja $\bar{\rho}\colon \mathbb{F}_X \to N_X$ zadana wzorem $\rho([u]) := \rho(u)$ jest dobrze określonym izomorfizmem struktur algebraicznych $(\mathbb{F}_X, \cdot)$ oraz $(N_X, \cdot)$. Wywnioskować, że $(N_X, \cdot)$ jest grupą (izomorficzną z $\mathbb{F}_X$).

   Uwaga. W konsekwencji $(N_X, \cdot)$ jest jawną realizacją grupy wolnej o wolnym zb. gen. X. Przewaga N_X nad $\mathbb{F}_X$ jest taka, że tu nie trzeba utożsamiać x z $[x]$, żeby dostać, że X jest podzbiorem rozważanej grupy. Przewaga $\mathbb{F}_X$ jest taka, że bardzo łatwo sprawdza się, że jest to grupa, a dla N_X łączność działania nie jest natychmiastowa (zauważmy, że w zadaniu łączność wynika z łączności działania w grupie $\mathbb{F}_X$, ale przy użyciu funkcji ρ i jej własności).

3. Przypomnijmy, że $X \subseteq G$ jest *zbiorem wolnych generatorów grupy* G, gdy $G = \langle X \rangle$ oraz każde nieskracalne słowo nad X zadaje różny on e_G element grupy G. Udowodnić, że ostatni warunek jest równoważny temu, że każde dwa $\sim$-nierównoważne słowa nad X zadają różne elementy G.

4. Dla podzbioru X grupy G udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

   (a) X jest zbiorem wolnych generatorów G.

   (b) G jest grupą wolną o wolnym zb. gen. X, tzn. istnieje izomorfizm $\varphi\colon G \to \mathbb{F}_X$, taki że $\varphi(x) = [x]$ dla każdego $x \in X$.

   (c) Dla każdej grupy H i funkcji $f\colon X \to H$ istnieje dokładnie jedno przedłużenie f do homomorfizmu $\bar{f}\colon G \to H$.

   Uwaga. Czasami ostatni punkt przyjmuje się jako definicję grupy wolnej o wolnym zbiorze generatorów X. Równoważność (b) i (c) była udowodniona na wykładzie (implikacja z (b) do (c) to uniwersalność grupy wolnej).

5. Niech X, Y będą zbiorami. Udowodnić, że:

   (a) jeśli $|X| = |Y|$, to $\mathbb{F}_X \cong \mathbb{F}_Y$,

   (b) jeśli $\mathbb{F}_X \cong \mathbb{F}_Y$, to $|X| = |Y|$.

Wsk. W (b) wydzielić grupy $\mathbb{F}_X$ i $\mathbb{F}_Y$ przez podgrupy generowane przez kwadraty wszystkich elementów.

6. Udowodnić, że podgrupa grupy wolnej $\mathbb{F}_{x,y}$ generowana przez elementy $x^n y x^n$, $n \in \mathbb{N}$, jest przez nie generowana w sposób wolny.

7. (a) Niech $G = \langle X \rangle$ i niech $A \subseteq \mathbb{L}_X$ będzie taki, że każde słowo z A zadaje element neutralny grupy G. Udowodnić, że wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\varphi\colon \langle X \mid A \rangle \to G$, taki że $\varphi|_X = \mathrm{id}_X$.

   (b) Ogólniej (uniwersalność grupy zadanej przez prezentację). Niech $A \subseteq \mathbb{L}_X$. Niech G będzie grupą, a $f\colon X \to G$ funkcją. Załóżmy, że dla każdego słowa $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_m}^{\epsilon_m} \in A$, $f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_m})^{\epsilon_m} = e_G$. Udowodnić, że wtedy istnieje dokładnie jedno przedłużenie f do homomorfizmu $\bar{f}\colon \langle X \mid A \rangle \to G$.

8. Udowodnić, że
$$S_3 \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = 1 \rangle.$$
Wsk. Skorzystać z "przepisu" podanego na wykładzie.

9. Udowodnić, że
$$D_n \cong \langle x, y \mid x^2 = y^n = xyxy = 1 \rangle.$$