

Kolokwium 2.
10 czerwca 2016

1. Dla niezależnych zmiennych losowych X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1 wyznacz gęstość rozkładu $X - Y$.

Dowód. Korzystając z faktu, że $f_{-Y}(x) = f_Y(-x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(x) &= f_X * f_{-Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t)f_{-Y}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t)f_Y(-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x+t}1_{[x-t \geq 0]}e^t1_{[-t \geq 0]}dt = e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}1_{[t \leq x, t \leq 0]}dt = e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}1_{[t \leq \min(x, 0)]}dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^{\min(x, 0)} e^{2t}dt = e^{-x} \frac{1}{2}e^{2\min(x, 0)} = \frac{1}{2}e^{\min(x, -x)} = \frac{1}{2}e^{-|x|} \end{aligned}$$

□

2. Dla ciągu $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. zmiennych losowych, takich że $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_4 + \cdots X_n X_{n+1}}{n}.$$

Dowód. W celu pokazania zbieżności chcemy skorzystać z MPWL. Niestety, zmienne w ciągu $(X_i X_{i+1})_{i \geq 1}$ nie są niezależne. W celu obejścia tego problemu rozbijamy szereg na dwa podszeregi (dla $n = 2k$):

$$\begin{aligned} S_k &:= \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_4 + \cdots X_{2k} X_{2k+1}}{2k} \\ &= \frac{X_1 X_2 + X_3 X_4 + \cdots X_{2k-1} X_{2k}}{2k} + \frac{X_2 X_3 + X_4 X_5 + \cdots X_{2k} X_{2k+1}}{2k} =: S_k^1 + S_k^2 \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że do każdej średniej S_k^i możemy zastosować MPWL: w S_k^1 zmienne $X_1 X_2, X_3 X_4, X_5 X_6, \dots$ są i.i.d. oraz $\mathbb{E}|X_1 X_2| = \mathbb{E}|X_1| \mathbb{E}|X_2| = (\mathbb{E}|X_1|)^2 < \infty$. Zatem $S_k^1 \rightarrow \mathbb{E}[X_1 X_2]/2 = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2]/2 = (\mathbb{E}[X_1])^2/2$ p.n. Analogicznie otrzymujemy $S_k^2 \rightarrow (\mathbb{E}[X_1])^2/2$ p.n. Stąd S_k jako suma zbieżnych p.n. ciągów zbiega do sumy granic tj. $S_k \rightarrow (\mathbb{E}[X_1])^2$ p.n.

Podobnie pokazujemy dla nieparzystych n . □

3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Pokaż, że zmienna X/Y ma ten sam rozkład co $\tan(U)$, przy czym U ma rozkład jednostajny na odcinku $(-\pi/2, \pi/2)$. Jaka jest jego gęstość?

Dowód. Wyznamy gęstości obu rozkładów.

Sposób 1:

Ponieważ zmienne X oraz Y są niezależne więc miara definiująca rozkład łączny wektora losowego (X, Y) jest miarą produktową tj. $d\mu_{(X,Y)}(x, y) = d\mu_X(x)d\mu_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$. Dla dowolnej funkcji mierzalnej, ograniczonej ϕ mamy

$$\mathbb{E}\phi(X/Y) = \int \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x/y) d\mu_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x/y) \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy$$

Podstawiając $x/y = u$ otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x/y) e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{-u^2 y^2/2} y du$$

dla $y > 0$ lub

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x/y) e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{-u^2 y^2/2} y du = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{-u^2 y^2/2} y du$$

dla $y < 0$. Stąd używając twierdzenia Fubini'ego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\phi(X/Y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{-(u^2 y^2 + y^2)/2} |y| du dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{-(u^2 y^2 + y^2)/2} y du dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \int_0^{\infty} e^{-(u^2 + 1)y^2/2} y dy du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \int_0^{\infty} e^{-(u^2 + 1)v} dv du = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \frac{1}{\pi} \frac{1}{u^2 + 1} du. \end{aligned}$$

Stąd $f_{X/Y}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$ jest gęstością zmiennej X/Y (wystarczy wziąć ϕ jako funkcję charakterystyczną odcinków).

Sposób 2: Ponieważ obie zmienne X, Y są symetryczne więc również zmienna $Z = X/Y$ jest symetryczna. Zatem wystarczy, że policzymy rozkład $|Z|$ i wtedy $f_Z(x) = \frac{1}{2} f_{|Z|}(x)$. W tym celu wyznaczmy rozkład $\log |Z| = \log |X| - \log |Y|$. Zauważmy, że $f_{|X|}(x) = (f_X(x) + f_X(-x))1_{[x \geq 0]} = 2f_X(x)1_{[x \geq 0]}$ oraz $f_{\log |X|}(x) = \frac{d}{dt} F_{\log |X|}(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{P}[\log |X| \leq t] = \frac{d}{dt} \mathbb{P}[|X| \leq e^t] = \frac{d}{dt} F_{|X|}(e^t) = e^t f_{|X|}(e^t)$. Stąd

$$\begin{aligned} f_{\log |Z|}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\log |X|}(t-s) f_{\log |X|}(-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\log |X|}(t-s) f_{\log |X|}(-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s} f_{|X|}(e^{t-s}) e^{-s} f_{|X|}(e^{-s}) ds = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s} f_X(e^{t-s}) e^{-s} f_X(e^{-s}) ds = 4 \int_0^{\infty} e^t f_X(e^t y) y f_X(y) dy \\ &= \frac{2e^t}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(e^t y)^2/2 - y^2/2} y dy = \frac{2e^t}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(e^{2t} + 1)y^2/2} y dy = \frac{2e^t}{\pi(e^{2t} + 1)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$f_{|Z|}(x) = f_{\log |Z|}(\log x)/x = \frac{2x}{\pi(x^2 + 1)x}$$

i ostatecznie

$$f_Z(x) = \frac{1}{2} f_{|Z|}(|x|) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}.$$

Wyznamy teraz gęstość $\tan U$. Mamy

$$f_{\tan U}(x) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}[\tan U \leq x] = \frac{d}{dx} \mathbb{P}[U \leq \arctan x] = \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} (\arctan x + \pi/2) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}.$$

□

4. Wyznacz granicę

$$\lim_n \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^n x_k}\right)^{x_i^2} dx_1 \dots dx_n$$

Dowód. Zauważmy, że wyrażenie z którego wyznaczmy granicę możemy przedstawić w postaci

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^n U_k}\right)^{U_i^2} \right],$$

przy czym zmienne U_i są i.i.d. o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Zauważmy również, że z MPWL

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^n U_k}\right)^{U_i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k}\right)^{n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2} = e^{\frac{\mathbb{E}[U_1^2]}{\mathbb{E}[U_1]}} \quad \text{p.n.}$$

Chcemy teraz uzasadnić, że z granicą możemy przejść pod znak wartości oczekiwanej. Korzystając teraz z faktu, że $1 + t \leq e^t$ oraz $x^2 \leq x$ dla $0 \leq x \leq 1$.

$$\left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^n U_k}\right)^{\sum_{i=1}^n U_i^2} \leq \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i^2}{\sum_{k=1}^n U_k}\right) \leq e.$$

Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej otrzymujemy

$$\lim_n \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^n U_k}\right)^{U_i^2} \right] = \mathbb{E} \left[\lim_n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=1}^n U_k}\right)^{U_i^2} \right] = e^{2/3},$$

ponieważ $\mathbb{E}[U_1] = \int_0^1 x dx = 1/2$ oraz $\mathbb{E}[U_1^2] = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$. □

5. Niech $(X_n), (r_n)$ będą niezależnymi ciągami niezależnych zmiennych losowych, przy czym X_i ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_i (tj. gęstość jest postaci $\lambda_i e^{-\lambda_i x}$ dla $x \geq 0$) natomiast $\mathbb{P}[r_n = -1] = \mathbb{P}[r_n = 1] = 1/n$ oraz $\mathbb{P}[r_n = 0] = 1 - 2/n$. Przy założeniu $\sum_n \frac{1}{n\lambda_n^2} < \infty$ zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i X_i.$$

Dowód. Zauważmy, że zmienne $Y_i = r_i X_i$ są niezależne. Ponadto $\mathbb{E}[r_i X_i] = \mathbb{E}[r_i] \mathbb{E}[X_i] = 0 \mathbb{E}[X_i] = 0$ oraz

$$\text{var}(Y_i) = \mathbb{E}[Y_i^2] - (\mathbb{E}[Y_i])^2 = \mathbb{E}[(r_i X_i)^2] = \mathbb{E}[r_i^2] \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{2}{i} \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{4}{i\lambda_i^2},$$

ponieważ

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{\lambda_i^2} e^{-y} dy = \frac{2}{\lambda_i^2}.$$

Zatem oba szeregi $\sum_n \mathbb{E}[Y_n]$, $\sum_n \text{var}(Y_n)$ są zbieżne. Stąd na mocy kryterium Kołmogorowa o dwóch szeregach $\sum_n r_n Y_n = \sum_n Y_n$ zbiega prawie na pewno. $\square$

6. Pokaż, że jeżeli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ oraz zmienna Y jest niezależna od X i ciągu (X_n) to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

Dowód. Wpierw pokażemy, że

$$X_n + Y \xrightarrow{D} X + Y.$$

W tym celu weźmy ograniczoną funkcję ciągłą f i wtedy

$$\begin{aligned} \lim_n \mathbb{E}[f(X_n + Y)] &= \lim_n \int \int f(x + y) d\mu_{(X_n, Y)}(x, y) \stackrel{(*)}{=} \lim_n \int \int f(x + y) d\mu_{X_n}(x) d\mu_Y(y) \\ &\stackrel{(**)}{=} \int \lim_n \int f(x + y) d\mu_{X_n}(x) d\mu_Y(y) \stackrel{(***)}{=} \int \int f(x + y) d\mu_X(x) d\mu_Y(y) \stackrel{(*)}{=} \int \int f(x + y) d\mu_{(X, Y)}(x, y) \\ &= \mathbb{E}[f(X + Y)], \end{aligned}$$

gdzie równości $(*)$ wynikają z niezależności Y od X_n i X odpowiednio, $(**)$ z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej a $(***)$ wynika ze słabej zbieżności X_n do X .

Ponieważ $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ więc $Y_n - Y \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ stąd również $Y_n - Y \xrightarrow{D} 0$. Korzystając z zadania 10 z listy 11.

$$X_n + Y_n = (X_n + Y) + (Y_n - Y) \xrightarrow{D} (X + Y) + 0.$$

□