

Lista 10.

1. Niech μ, ν, λ będą σ -skończonymi miarami. Pokaż, że

i) jeżeli $\mu, \nu \ll \lambda$ to

$$\frac{d(\mu + \nu)}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda}$$

ii) jeżeli $\mu \ll \nu \ll \lambda$ to

$$\frac{d\mu}{d\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda}$$

iii) jeżeli $\mu \ll \nu$ oraz $\nu \ll \mu$ to

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)^{-1}$$

2. Załóżmy, że $\nu_i \ll \mu_i$ dla $i = 1, 2$. Pokaż, że wtedy $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ i zachodzi wzór

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

3. Uzasadnij, że jeśli $\nu \ll \mu$ oraz $\nu \perp \mu$ to $\nu = 0$.

4. Niech μ będzie lokalnie skończoną (skończoną na każdym przedziale) miarą na $\text{Bor}(\mathbb{R})$. Pokaż, że funkcja

$$F(x) = \begin{cases} \mu[0, x) & \text{dla } x \geq 0 \\ \mu[x, 0) & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest niemalejąca oraz lewostronnie ciągła.

5. Dla niemalejącej, lewostronnie ciągłej $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiujemy miarę μ_F , taką że $\mu_F[a, b) = F(b) - F(a)$. Pokaż, że

i) μ_F jest skończona wtedy i tylko wtedy gdy F jest ograniczona

ii) punkt x_0 jest atomem dla miary μ_F wtedy i tylko wtedy gdy F jest nieciągła w x_0 . Ile wynosi $\mu(\{x_0\})$?
W szczególności μ_F jest ciągła (bezatomowa) wtedy i tylko wtedy gdy F jest ciągła.

6. Pokaż, że dla funkcji Cantora F wprowadzonej na wykładzie miara μ_F jest singularna względem miary Lebesgue'a.

7. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie σ -skończoną przestrzenią miarową i niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie pewnym σ -ciałem. Korzystając z twierdzenia Radona-Nikodyma uzasadnij, że dla dowolnej μ -całkowalnej funkcji f istnieje $\mathcal{G}$ -mierzalna funkcja g , taka że

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x) \quad \text{dla dowolnego } E \in \mathcal{G}.$$

Funkcję g oznaczamy $\mathbb{E}[f|\mathcal{G}]$.

8. Dla przestrzeni miarowej $([0, 1], \text{Bor}([0, 1]), \lambda)$ oraz dowolnej funkcji całkowalnej f wyznacz $f_0 = \mathbb{E}[f|\{\emptyset, [0, 1]\}]$. Ogólniej dla $\mathcal{F}_n = \sigma(\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) : 0 \leq k < 2^n\})$ wyznacz $f_n = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$. Zauważ, że $\mathbb{E}[f_n|\mathcal{F}_m] = f_{\min(n, m)}$.

9. Dla ciągu f_n takiego jak w poprzednim zadaniu pokaż że dla $\lambda > 0$ zachodzi

$$\lambda(x : \max_n f_n(x) > \lambda) \leq \lambda^{-1} \int_0^1 |f(x)| dx$$

Wskazówki: Niech $G = \{x : \max_n f_n(x) > \lambda\}$. Dla $x \in G$ definiujemy $n(x) = \min\{k : f_k(x) > \lambda\}$. Pokaż, że dla $g(x) = \sum_i f_i(x) \chi_{n^{-1}(i)}(x)$ zachodzi $G = \{x : g(x) > \lambda\}$. Zastosuj nierówność Czebyszewa dla funkcji g a następnie porównaj tę całkę z $\int_0^1 |f(x)| dx$.