

Lista 2.

1. Uzasadnij, że rodzina zbiorów $\mathcal{R} := \{\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i) : n \geq 0, a_i < b_i \text{ dla } i \leq n\}$ tworzy pierścień na $\mathbb{R}$.
2. Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem zbiorów zdefiniowanym powyżej. Pokaż, że $\mu_0(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|$ jest dobrze zdefiniowaną przeliczalnie addytywną funkcję zbioru.
3. Dla rosnącego ciągu ciał $\mathcal{A}_n$ definiujemy $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$. Czy $\mathcal{A}$ jest również ciałem? (porównaj odpowiedź z zadaniem 3 z listy 1.)
4. Dla ciągu zbiorów A_n definiujemy zbiory $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$ oraz $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$, które nazywamy odpowiednio granicą dolną oraz górną ciągu A_n . Uzasadnij
 - i) $\bigcap_{n \geq 1} A_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \leq \bigcup_{n \geq 1} A_n$.
 - ii) $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$
 - iii) $\liminf_n (A_n \cap B_n) = \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$
 - iv) $\liminf_n (A_n \cup B_n) \supseteq \liminf_n A_n \cup \liminf_n B_n$. Podaj przykład ciągów dla których równość nie zachodzi.
 - v) dla dowolnego σ -ciała $\mathcal{F}$ jeżeli $A_n \in \mathcal{F}$ to również $\liminf_n A_n, \limsup_n A_n \in \mathcal{F}$

Jeżeli $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ to mówimy, że ciąg (A_n) jest zbieżny i powyższy zbiór oznaczamy $\lim_n A_n$.
5. Udowodnić, że jeśli (A_n) jest ciągiem zbiorów z σ -ciała na którym określona jest miara skończona μ to $\mu(\lim_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
6. Czy dla dowolnego ciągu ciał $\mathcal{A}_n$ rodziny $\liminf_n \mathcal{A}_n$ oraz $\limsup_n \mathcal{A}_n$ są również ciałami? Co w przypadku σ -ciał?
7. Dla σ -ciała $\mathcal{F}$ oraz zbioru $E \notin \mathcal{F}$ opisz postać zbiorów z $\sigma(\mathcal{F}, \{E\})$.
8. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią miarową, $\mathcal{N} = \{N : N \subseteq M, \mu(M) = 0\}$. Definiujemy $\mathcal{F}^* = \{E \cup N : E \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$, oraz $\bar{\mu} : \mathcal{F}^* \mapsto [0, +\infty]$ wzorem $\bar{\mu}(E \cup N) := \mu(E)$. Wykaż, że rodzina $\mathcal{F}^*$ jest σ -ciałem oraz $\bar{\mu}$ jest dobrze zdefiniowaną miarą na $\mathcal{F}^*$.
9. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania uzasadnij $(X, \mathcal{F}^*, \bar{\mu}) = (X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*)$.
10. Dla λ^* zdefiniowanej w zadaniu 11 z listy 1. wyznacz $|\mathcal{M}(\lambda^*)|$.
11. Udowodnij $\lambda^*(A) = 0 \implies \text{int}(A) = \emptyset$.
12. Sprawdzić, że $\text{Bor}(\mathbb{R})$ generowane jest przez każdą z następujących rodzin
 - i) odcinki otwarte o końcach wymiernych
 - ii) odcinki domknięte
 - iii) odcinki postaci $(a, b]$, przy czym $a, b \in \mathbb{Q}$
 - iv) półproste postaci $(-\infty, a]$, przy czym $a \in \mathbb{Q}$
- *13. Dla zbioru Cantora C wyznacz $\mathcal{H}_\delta^d(C) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty |b_i - a_i|^d : C \subseteq \bigcup_{i \geq 1} [a_i, b_i], b_i - a_i < \delta\}$, a następnie $\mathcal{H}^d(C)$. Dla jakiego parametru $d \geq 0$ $\mathcal{H}^d(C) = 0$ a dla jakiego $\mathcal{H}^d(C) = \infty$? (por.: zad. 13, 16 z listy 1).