

Lista 4.

1. Niech μ będzie miarą borelowską na $\mathbb{R}^n$, skończoną na kulach. Uzasadnij, że dla każdego borelowskiego E spełniającego $\mu(E) < \infty$ oraz każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K , taki że $\mu(E \setminus K) < \epsilon$.
2. Uzasadnij, że jeżeli $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ dla $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ oraz $\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$ to $E \in \mathcal{L}$.
3. Na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ definiujemy miary zewnętrzne $\mu_p^*(A) = \inf\{\sum_i \text{vol}(P_i) : A \subseteq \bigcup_i P_i\}$ oraz $\mu_k^*(A) = \inf\{\sum_i \text{vol}(Q_i) : A \subseteq \bigcup_i Q_i\}$, przy czym $P_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n]$ są prosotpadłościanami a Q_i pewnymi kostkami. Uzasadnij, że $\mu_k^* = \mu_p^*$ oraz ich obcięcie do zbiorów borelowskich definiuje miarę m , taką że $m(E) = m(E+x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$.
4. Dla $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, przy czym $\delta_i > 0$ definiujemy

$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in E\}.$$

Uzasadnij, że δE jest borelowski dla dowolnego borelowskiego E . Ponadto $m(\delta E) = \delta_1 \dots \delta_n m(E)$.

5. Rozważmy następującą modyfikację zbioru Cantora: dla zadanego ciągu (l_n) liczb nieujemnych w k -tym kroku z każdego odcinka domkniętego usuwamy środkowy odcinek otwarty o długości l_k . Uzasadnij, że tak otrzymany w granicy zbiór $\tilde{C} \neq \emptyset$? Oblicz $\lambda(\tilde{C})$?
6. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ definiujemy

$$J^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^N |I_i| : A \subseteq \bigcup_{i=1}^N I_i\right\}.$$

Uzasadnij, że $J^*(A) = J^*(\bar{A})$. Podaj przykład zbioru przeliczalnego zbioru $E \subseteq [0, 1]$ takiego by $J^*(A) = 1$.

7. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią miarową. Mówimy, że $T \in \mathcal{F}$ jest *atomem* miary μ jeżeli dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ z faktu $A \subseteq T$ wynika $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = \mu(T)$. Jeżeli miara μ nie ma atomów to mówimy, że jest *bezatomowa*.

Uzasadnij, że miara Lebesgue'a jest bezatomowa.

8. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie skończoną przestrzenią miarową. Uzasadnij, że dla dowolnego $E \in \mathcal{F}$ oraz $0 < r < \mu(E)$ istnieje $A \subseteq E$, taki że $\mu(A) = r$. Wsk: dla dowolnego δ zbiór E można przedstawić jako sumę zbiorów o mierze nie większej niż δ .
9. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ dowolny, taki że $\lambda^*(A) > 0$. Uzasadnij, że dla dowolnej $0 < \alpha < 1$ istnieje odcinek I taki by $\lambda^*(A \cap I) \geq \alpha \lambda(I)$.
10. Udowodnij, że dla $E \in \mathcal{L}$ jeżeli $\lambda(E) > 0$ to zbiór $E - E := \{x - y, x, y \in E\}$ zawiera pewne otoczenie zera. Wsk: poprzednie zadanie z $\alpha = 0.9$ oraz zauważ, że jeżeli $a \notin E \cap I$ to $E \cap I$ oraz $a + E \cap I$ są rozłączne. Porównaj odpowiednie miary.
11. Udowodnij, że dla $E, F \in \mathcal{F}$ jeżeli $\lambda(E), \lambda(F) > 0$ to

$$E + F = \{x + y; x \in E, y \in F\}$$

zawiera odcinek otwarty.