

Lista 5.

1. Uzasadnij, że każda z rodzin $\{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$, $\{[-\infty, t) : t \in \mathbb{Q}\}$ itd. generuje σ -ciało $\sigma(\text{Bor}(\mathbb{R}) \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$.
2. Uzasadnij regułę Littlewooda: "...każdy (mierzalny) zbiór w $\mathbb{R}^n$ jest niemal skończoną sumą odcinków...", ściślej: dla dowolnego zbioru $E \in \text{Bor}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\epsilon > 0$ istnieje skończona kolekcja odcinków $I_1, \dots, I_N$, takich że $\lambda\left(\left(\bigcup_{i=1}^N I_i\right) \triangle E\right) < \epsilon$.
3. Uzasadnij, że jeśli $f : X \mapsto \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$ mierzalną funkcją prostą to istnieją różne liczby $a_1, \dots, a_k$ oraz ciąg parami rozłącznych zbiorów $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$, takich że

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}.$$

4. Uzasadnij, że suma oraz iloczyn funkcji prostych jest funkcją prostą. Podobnie złożenie funkcji prostej z dowolną funkcją jest również funkcją prostą.
5. Uzasadnij, że dla dowolnej funkcji mierzalnej f istnieje ciąg funkcji prostych s_n , takich że $|s_k(x)| \leq |s_{k+1}(x)|$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$. Wsk: $f = f^+ - f^-$ dla $f^+ = \max(f, 0)$ oraz $f^- = -\min(f, 0)$.
6. Funkcję prostą $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nazywamy funkcją schodkową jeżeli jest stała na określonych przedziałach. Uzasadnij, że dla dowolnej funkcji mierzalnej f istnieje ciąg (ϕ_n) funkcji schodkowych, takich że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x) \quad \lambda \text{ prawie wszędzie.}$$

Wsk: użyj zadania 2. w celu zastąpienia funkcji prostych funkcjami schodkowymi.

7. Pokaż w bezpośredni sposób, że iloczyn funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.
8. Pokaż, że funkcja h zdefiniowana w następujący sposób $h(t) = \frac{1}{t}$ dla $t \neq 0$ oraz $g(0) = 1$ jest funkcją borelowską na $\mathbb{R}$. Wywnioskuj, że dla funkcji mierzalnych $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$, jeśli $g(x) \neq 0$ dla $x \in X$ to $\frac{f}{g}$ jest funkcją mierzalną.
9. Pokaż, że każda funkcja monotoniczna $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest borelowska.
10. Dana jest rodzina $\{f_s : s \in S\}$ funkcji ciągłych $f_s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ indeksowanych pewnym nieprzeliczalnym zbiorem S . Udowodnij, że $h(x) = \sup_{s \in S} f_s(x)$ jest borelowska. Wsk: Co można powiedzieć o zbiorze $\{\sup_s f_s \leq t\}$?
11. Uzasadnij, że założenie ciągłości w poprzednim zadaniu jest istotne tj.: podaj przykład rodziny funkcji borelowski $\{f_t\}_{t \in T}$, takich że $\sup_{t \in T} f_t$ nie jest borelowski.
12. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Niech $F_\epsilon = \{x : \text{osc}_x(f) \geq \epsilon\}$, przy czym

$$\text{osc}_x(f) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x_1, x_2 \in (x-\delta, x+\delta)} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Uzasadnij, że F_ϵ jest zbiorem domkniętym. Wywnioskuj, że zbiór ciągłości f jest zbiorem borelowskim.