

Lista 6.

1. Dla funkcji $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$, $f_3 = \text{sgn}(x - 1/e)\chi_{\mathbb{Q}^c}$ określonych na $[-1, 1]$
 - i) wyznaczyć odpowiednie zbiory ciągłości $C_i = \{x : f_i \text{ jest ciągła w punkcie } x\}$. Które funkcje są ciągłe prawie wszędzie tj. $\lambda(C_i^c) = 0$?
 - ii) Wskaż zbiory $E_i \subseteq [0, 1]$ pełnej miary, takie że obcięcie $f_i|_{E_i}$ do E_i jest funkcją ciągłą.
Przypomnienie: $f|_E$ jest ciągła w punkcie $x \in E$ jeżeli
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - y| < \delta, y \in E) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$
 - iii) Dla jakich funkcji istnieje ciągła wersja tj. funkcja ciągła g równa f_i prawie wszędzie?
2. Zauważyć, że jeśli $\mu(X) < \infty$, a $f : X \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór A , taki że $\mu(A) < \epsilon$ i f jest ograniczona na $X \setminus A$.
3. Niech $|f_n| \leq M$, gdzie $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Sprawdzić, że $|f| \leq M$ prawie wszędzie.
4. Niech f_n będzie niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych, zbieżnych do f wg. miary. Udowodnić, że wtedy $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie.
5. Sprawdzić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$. Pokazać, że $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ przy dodatkowym założeniu, że f_n i g_n są wspólnie ograniczone przez stałą.
6. Niech μ będzie miarą skończoną. Wykazać, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oraz $f(x) \neq 0$ dla każdego x , to $1/f_n \xrightarrow{\mu} 1/f$.
7. Niech μ będzie miarą skończoną. Wykazać, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oraz h jest dowolną funkcją ciągłą to $h(f_n) \xrightarrow{\mu} h(f)$.
8. Niech $\mu(X) < \infty$. Udowodnić, że jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$. Pokazać, że założenie skończoności miary jest istotne.
9. Pokazać, że dla dowolnej funkcji mierzalnej f istnieje ciąg funkcji ciągłych, takich że $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie.
10. Skonstruuj zbiór mierzalny $E \subseteq [0, 1]$ o tej własności, że dla dowolnego odcinka $I \subseteq [0, 1]$ miary $\lambda(E \cup I)$ oraz $\lambda(E^c \cap I)$ są dodatnie. Wskazówka: w pierwszym kroku bierzemy modyfikację zbioru Cantora z zadania 5 z listy 4 z dodatnią miarą a następnie na każdym odcinku który kiedykolwiek odrzuciliśmy powtarzamy tę konstrukcję.
11. Dla zbioru E z poprzedniego zadania definiujemy $f = \chi_E$. Pokazać, że jeżeli funkcja mierzalna g jest równa f prawie wszędzie to g jest nieciągła w każdym punkcie $x \in [0, 1]$.
12. Dla funkcji f z poprzedniego zadania pokazać, że nie zachodzi twierdzenie Łuzina z $\epsilon = 0$: dla dowolnego zbioru miary zero A obcięcie $f|_{[0,1] \setminus A} : [0, 1] \setminus A \mapsto \mathbb{R}$ nie jest funkcją ciągłą.