

Lista 7.

1. Dla dodatnich funkcji mierzalnych f, g uzasadnij
 - i) $\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$ dla dowolnych rozłącznych zbiorów mierzalnych E, F .
 - ii) jeśli $f \leq g$ to $\int f d\mu \leq \int g d\mu$
 - iii) jeśli $\int f d\mu < \infty$ to $f(x) = 0$ prawie wszędzie.
2. Korzystając z odpowiednich własności dla całek z funkcji dodatnich uzasadnij, że całka Lebesgue'a zdefiniowana dla dowolnej funkcji całkowalnej f wzorem $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ jest liniowa, addytywna, monotoniczna oraz spełnia nierówność trójkąta.
3. Ustalić, czy
 - i) iloczyn funkcji całkowalnych jest całkowalny
 - ii) funkcja f , gdzie $f = 1$ prawie wszędzie jest całkowalna;
 - iii) f jest całkowalna jeśli jest całkowalna na każdym zbiorze miary skończonej.
4. Na przestrzeni $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą tj. $\mu(A) = |A|$ dla zbiorów skończonych oraz $\mu(A) = \infty$ dla każdego A nieskończonego. Udowodnić, że $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{i=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Ile wynosi całka z f ?
5. Czy funkcja $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor + 1}$ jest całkowalna w sensie Riemanna (całka niewłaściwa)? Czy jest również całkowalna w sensie Lebesgue'a?
6. Dla funkcji f zdefiniowanej powyżej wskaż ciąg zbiorów mierzalnych E_n o skończonej mierze, takich że $\bigcup_n E_n = [0, \infty)$ oraz $\int_{E_n} f(x) d\lambda(x) \rightarrow \infty$.
7. Niech $\mu(X) < \infty$ oraz f_n będzie ograniczonym/monotonicznym ciągiem funkcji mierzalnych, takim że $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Uzasadnij, że $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Wskazówka: jeżeli z każdego podciągu ciągu a_n można wybrać podciąg zbieżny do a to $\lim_n a_n = a$.
8. Wykazać nierówność Czebyszewa: dla dowolnej funkcji całkowalnej f oraz $t > 0$

$$\mu\{x : |f(x)| \geq t\} \leq \int |f| d\mu.$$

9. Z powyższej nierówności wywnioskować, że jeżeli

$$\int |f - f_n| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{to} \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

10. Korzystając z lematu Fatou udowodnić ogólne twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej: jeżeli ciąg funkcji f_n zbiega punktowo do pewnej funkcji f oraz $|f_n| \leq g$ prawie wszędzie dla pewnej nieujemnej funkcji całkowalnej g wówczas funkcje f_n, f są również całkowalne oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$. Wskazówka: rozważyć ciągi $g - f_n$ oraz $f_n + g$.