

Lista 8.

1. Dla danej kolekcji $E_1, E_2, \dots, E_n$ zbiorów mierzalnych znajdź kolekcję zbiorów mierzalnych $F_1, \dots, F_N$ gdzie $N = 2^n - 1$ oraz dla dowolnego k

$$E_k = \bigcup_{j: F_j \cap E_k \neq \emptyset} F_j = \bigcup_{j: F_j \subseteq E_k} F_j.$$

2. Podaj przykład funkcji ciągłej dodatniej $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, takiej że f jest całkowalna ale $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
3. Uzasadnij, że dla jednostajnie ciągłej funkcji całkowalnej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
4. Niech f będzie funkcją na $\mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla ciągu $\{r_n\}_{n \geq 1}$ wszystkich liczb wymiernych definiujemy

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x + r_n).$$

Uzasadnij, że F jest funkcją całkowalną i wywnioskuj, że szereg definiujący F jest zbieżny dla prawie każdego $x \in \mathbb{R}$. Pokaż, że F nie jest ograniczona na dowolnym odcinku I , co więcej jeśli $\tilde{F} = F$ p.w. to również $\tilde{F}$ nie jest ograniczona na I .

5. Dla przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz funkcji mierzalnej $f: \mathbb{R} \mapsto [0, \infty]$ definiujemy zbiory $E_k = f^{-1}((2^k, \infty))$, $F_k = f^{-1}([2^k, 2^{k+1}])$. Uzasadnij, że $\{x: 0 < f(x) < \infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_k$ oraz f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \mu(F_k) < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \mu(E_k) < \infty$.
6. Załóżmy, że f_n, f, g_n, g są funkcjami całkowalnymi, takimi że $f_n \rightarrow f$ p.w., $g_n \rightarrow g$ p.w., $f_n \leq |g_n|$ oraz $\int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu$. Udowodnij $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.
7. Dana jest przestrzeń miarowa $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz ciąg nieujemnych funkcji całkowalnych f_n , takich że $f_n \rightarrow f$ prawie wszędzie oraz $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Wykaż, że dla dowolnego mierzalnego A zachodzi

$$\int_A f_n d\mu = \int_A d\mu.$$

8. Załóżmy, że f_n oraz f są funkcjami całkowalnymi, takimi że $f_n \rightarrow f$ p.w. oraz $\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu$. Pokaż że $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.
9. Dane są funkcje całkowalne f_n, f spełniające $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ oraz ograniczone g_n, g , takie że $g_n \rightarrow g$ p.w. Wykaż, że $\int f_n g_n d\mu \rightarrow \int f g d\mu$.
10. Uzasadnij, że następujące ciągi są zbieżne oraz wyznacz ich granice
i) $\int_0^n (1 + x/n)^{-n} \log(2 + \cos(x/n)) dx$
ii) $\int_0^n (1 - x/n)^n \log(2 + \cos(x/n)) dx$
iii) $\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \log(2 + \cos(x/n)) dx$
iv) $\int_0^\infty n e^{-nx} \sin(1/x) dx$
v) $\int_{-n}^n f\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) g(x) dx$ dla ciągłej, ograniczonej funkcji f oraz całkowalnej g
11. Dla funkcji całkowalnej $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ pokaż, że $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$ jest jednostajnie ciągła.