

Lista 9.

1. Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ będzie funkcją borelowską. Wykazać, że zbiór pod jej wykresem $\{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\}$ jest borelowskim podzbiorem płaszczyzny.
2. Niech $f : X \mapsto \mathbb{R}_+$ będzie funkcją mierzalną na przestrzeni $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $P = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\}$ będzie zbiorem pod wykresem funkcji. Sprawdzić, że P należy do $\mathcal{F} \otimes \text{Bor}(\mathbb{R})$ oraz wywnioskować z twierdzenia Fubiniego, że

$$\mu \otimes \lambda(P) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

3. Obliczyć miary Lebesgue'a zbiorów

$$A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ lub } y \in \mathbb{Q}\}, \quad B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$$

4. Dla zbiorów borelowskich $A, B \subset [0, 1]^2$ spełniających $A_x = B_x$ dla wszystkich x pokazać $\lambda_2(A) = \lambda_2(B)$.
5. Niech μ będzie miarą liczącą na $\mathbb{N}$. Pokaż, że dla funkcji

$$f(i, j) = \begin{cases} 2 - 2^{-i} & \text{gdy } i = j, \\ -2 + 2^{-i} & \text{gdy } i = j + 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

całki iterowane istnieją ale są różne. Dlaczego nie ma sprzeczności z twierdzeniem Fubiniego?

6. Pokaż, że

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

nie jest całkowalna na $[-1, 1]^2$ pomimo, że całki iterowane istnieją i są równe.

7. Na przestrzeni $[0, 1]$ rozważamy σ -ciało $\mathcal{F} = \{A : A \text{ lub } A^c \text{ jest co najwyżej przeliczalny}\}$. Wykaż, że przekątna $E = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ nie jest $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ mierzalna.