

Lista 11

zad. 11

Z faktu, że ciąg zmiennych losowych X_n zbiega według rozkładu do X wynika, że ciąg ten jest ciasny tzn.: dla dowolnego ϵ istnieje M o tej własności, że $\mathbb{P}[|X_n| \geq M] < \epsilon$ dla wszystkich n (porównaj analogiczny fakt dla ciągów liczbowych: “ciąg zbieżny jest ograniczony”). Rzeczywiście, niech M_1 będzie taką liczbą aby $\mathbb{P}[|X| \geq M_1] \leq \epsilon/2$ wtedy ze zbieżności

$$\limsup_n \mathbb{P}[|X_n| \geq M_1] \leq \mathbb{P}[|X| \geq M_1] \leq \epsilon/2$$

więc dla pewnego n_0 mamy $\mathbb{P}[|X_n| \geq M_1] < \epsilon$ o ile $n \geq n_0$. Biorąc $X' = \max(X_1, \dots, X_{n_0})$ możemy znaleźć M_2 tak aby $\mathbb{P}[X' \geq M_2] < \epsilon$ i wtedy $M = \max(M_1, M_2)$ spełnia założenia.

Z treści zadania $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\delta > 0$ oraz $\epsilon > 0$ mamy $\limsup_n \mathbb{P}[|X_n Y_n| \geq \delta] \leq \epsilon$ (zbieżność wg. miary). Zauważmy, że zachodzi

$$\mathbb{P}[|X_n Y_n| \geq \delta] \leq \mathbb{P}[|X_n Y_n| \geq \delta \wedge |X_n| \geq M] + \mathbb{P}[|X_n Y_n| \geq \delta \wedge |X_n| < M] \leq \mathbb{P}[|X_n| \geq M] + \mathbb{P}[|Y_n| \geq \delta/M],$$

biorąc obustronnie $\limsup_n$ otrzymujemy tezę.

W celu dowiedzenia drugiego podpunktu zauważmy, że $cX_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$ oraz $Y_n - c \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Ponadto, z przedniego podpunktu $X_n(Y_n - c) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Korzystając zatem z zdania 10 a) otrzymujemy

$$X_n Y_n = cX_n + X_n(Y_n - c) \xrightarrow{\mathcal{D}} cX.$$

zad. 12

Np.: $X_n = Y_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz $X = -Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

zad. 13

Porównaj z zadaniem 9.